

P. P.



Meinen umfangreichen Verlag auf dem Gebiete der **Mathematischen**, der **Technischen und Naturwissenschaften** nach allen Richtungen hin weiter auszubauen, ist mein stetes durch das Vertrauen und Wohlwollen zahlreicher hervorragender Vertreter obiger Gebiete von Erfolg begleitetes Bemühen, wie mein Verlagskatalog zeigt, und ich hoffe, daß bei gleicher Unterstützung seitens der Gelehrten und Schulmänner des In- und Auslandes auch meine weiteren Unternehmungen Lehrenden und Lernenden in Wissenschaft und Schule jederzeit förderlich sein werden. **Verlagsanerbieten** gediegener Arbeiten auf einschlägigem Gebiete werden mir deshalb, wenn auch schon gleiche oder ähnliche Werke über denselben Gegenstand in meinem Verlage erschienen sind, stets sehr willkommen sein.

Unter meinen zahlreichen Unternehmungen mache ich ganz besonders auf die von den Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien herausgegebene **Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften** aufmerksam, die in 7 Bänden die Arithmetik und Algebra, die Analysis, die Geometrie, die Mechanik, die Physik, die Geodäsie und Geophysik und die Astronomie behandelt und in einem Schlußband historische, philosophische und didaktische Fragen besprechen wird. Eine **französische Ausgabe**, von französischen Mathematikern besorgt, hat zu erscheinen begonnen.

Weitester Verbreitung erfreuen sich die mathematischen und naturwissenschaftlichen Zeitschriften meines Verlags, als da sind: Die **Mathematischen Annalen**, die **Bibliotheca Mathematica** (Zeitschrift für Geschichte der Mathematischen Wissenschaften), das **Archiv der Mathematik und Physik**, die **Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung**, die **Zeitschrift für Mathematik und Physik** (Organ für angewandte Mathematik), die **Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht**, die **Mathematisch-naturwissenschaftlichen Blätter**, ferner **Natur und Schule** (Zeitschrift für den gesamten naturkundlichen Unterricht aller Schulen), die **Geographische Zeitschrift** u. a.

Seit 1868 veröffentliche ich: **„Mitteilungen der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner“**. Diese jährlich zweimal erscheinenden „Mitteilungen“, die in 30000 Exemplaren im In- und Auslande von mir verbreitet werden, sollen das Publikum, das meinem Verlage Aufmerksamkeit schenkt, von den erschienenen, unter der Presse befindlichen und von den vorbereiteten Unternehmungen des Teubnerschen Verlags durch ausführliche Selbstanzeigen der Verfasser in Kenntnis setzen und sind ebenso wie das bis auf die Jüngstzeit fortgeführte **Ausführliche Verzeichnis des Verlags von B. G. Teubner auf dem Gebiete der Mathematik, der Technischen und Naturwissenschaften nebst Grenzgebieten**, 100. Ausgabe [XLVIII u. 272 S. gr. 8], in allen Buchhandlungen unentgeltlich zu haben, werden auf Wunsch aber auch unter Kreuzband von mir unmittelbar an die Besteller übersandt.

Leipzig, Poststraße 3.

B. G. Teubner.



VORLESUNGEN

ÜBER

TECHNISCHE MECHANIK

VON

Dr. AUGUST FÖPPL

PROF. A. D. TECHN. HOCHSCHULE IN MÜNCHEN

IN SECHS BÄNDEN

FÜNFTER BAND:

DIE WICHTIGSTEN LEHREN DER HÖHEREN ELASTIZITÄTSTHEORIE

MIT 44 FIGUREN IM TEXT



LEIPZIG

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER

1907

Vorwort.

Als ich meine „Festigkeitslehre", die den dritten Band dieser Vorlesungen bildet, für die dritte Auflage zu bearbeiten hatte, entschied ich mich nach sorgfältiger Erwägung zu einer erheblichen Einschränkung des Stoffes, der darin behandelt werden sollte. Das geschah freilich nicht, weil ich die weggelassenen Teile an sich als überflüssig betrachtet hätte. Umgekehrt mußte mir vielmehr für gewisse Zwecke eine Erweiterung des Stoffes weit über das frühere Maß hinaus notwendig erscheinen. Andererseits gebot aber die Rücksicht auf das praktisch erreichbare Ziel einer für alle Studierenden der Ingenieurwissenschaften bestimmten Vorlesung unbedingt eine Einschränkung. Um beiden Forderungen genügen zu können, mußte ich mich daher zu einer Teilung des ganzen Stoffes, der hierbei überhaupt in Betracht kommt, in zwei Bände entschließen. Von diesen Bänden umfaßt der dritte in der vor zwei Jahren erschienenen Neuauflage nur noch das, was sich ungefähr in einer allgemeinen Vorlesung der bezeichneten Art unterbringen läßt, während der fünfte Band, den ich hiermit der Öffentlichkeit übergebe, für ein weitergehendes Studium bestimmt ist und namentlich jenen Ingenieuren, die sich in ihrem Berufe nicht selten auch mit schwierigeren Festigkeitsberechnungen zu beschäftigen haben, dazu eine geeignete Anleitung geben soll.

Diesem Zwecke suchte ich die Auswahl und die Behandlung des Stoffes in erster Linie anzupassen. Dabei habe ich mich vielfach von den Anregungen leiten lassen, die ich

aus Anfragen von außerhalb und aus den Äußerungen von manchen meiner ehemaligen Schüler über ihre Erfahrungen in der Praxis erhielt. Was ich auf diesem Wege erfuhr, läßt mich schließen, daß nicht nur die Schätzung eines gründlichen theoretischen Wissens allgemein im Steigen begriffen ist, sondern daß auch die Ansprüche, die daran gestellt werden, fortwährend wachsen. Das bezieht sich selbstverständlich nicht auf alle Ingenieure; aber es scheint doch, daß namentlich die größeren industriellen Werke jetzt weit mehr Wert als früher darauf legen, unter ihren Ingenieuren einige zu haben, die mit den theoretischen Grundlagen ihres Faches besonders gut vertraut sind. Und diesen Ingenieuren werden dann, wie ich wahrnehmen konnte, gar nicht selten Aufgaben aus der Elastizitätstheorie gestellt, zu deren Lösung, selbst wenn sie (wie es gewöhnlich der Fall ist) nur angenähert verlangt wird, ausgiebigere Hülfsmittel erforderlich oder mindestens erwünscht sind, als sie früher im dritten Bande meiner Vorlesungen geboten werden konnten.

Hierzu kommt noch ein anderer Umstand, der mir gleichfalls eine in den Zielen und nach den Verfahrungsweisen weiter gehende Darstellung der Elastizitätstheorie, die den Bedürfnissen der Ingenieure angepaßt ist, notwendig erscheinen ließ: nämlich die Einführung der technischen Doktorwürde. Von vornherein durfte man hoffen, daß diese das wissenschaftliche Streben der jüngeren Ingenieure kräftig fördern würde und diese Hoffnung hat sich auch ohne Zweifel erfüllt. Die mit Recht verhältnismäßig hoch gestellten Anforderungen an die wissenschaftliche Arbeit eines Doktoranden haben freilich dafür gesorgt, daß die Zahl der Promotionen in den hier in Frage kommenden Fächern nicht allzugroß ausfällt. Aber nach dieser Zahl allein lassen sich die Folgen der neuen Einrichtung nicht beurteilen. Es kommt vielmehr hinzu, daß recht viele, wenn sie auch schließlich auf die Erreichung dieses Zieles verzichten, schon dadurch, daß es überhaupt aufgesteckt wurde, zu einer weiteren Beschäftigung mit der Theorie veranlaßt werden.

Zu den Fächern, die für ein solches Studium bevorzugt werden, gehört die technische Mechanik überhaupt und insbesondere auch die Festigkeitslehre. Nun ist von vornherein klar, daß eine wissenschaftliche Arbeit, die immerhin etwas Neues bringen soll, aus dem im dritten Bande behandelten Gebiete, das schon so vielfach durchgearbeitet wurde, allein nicht eben leicht herausgeholt werden kann. Das wird ganz anders, wenn die Erweiterung, die dieser fünfte Band bringt, mit dazu genommen wird. Man wird in ihm eine große Zahl von Anregungen zu Arbeiten finden können, die den Ansprüchen an eine Dissertation zu genügen vermögen. Den öfters, nicht nur aus dem Kreise meiner Schüler, sondern auch von auswärts an mich herantretenden Anfragen wegen eines passenden Themas auf diesem Gebiete werde ich künftig durch den Hinweis auf diesen Band antworten können.

Übrigens habe ich an manchen Stellen des Buches eine weitere Ausarbeitung, die sonst nahe gelegen hätte, sogar absichtlich unterlassen, weil ich dem Leser die Gelegenheit und die Befriedigung nicht nehmen wollte, mit eigenen Kräften weiter zu kommen.

Über die Art, wie der Leser diesen Band wohl am besten benutzen wird, mögen mir einige Ratschläge gestattet sein. Voraussetzung für die Benutzung ist jedenfalls, daß man die Lehren des dritten Bandes bereits kennt und schon einige Übung in ihrer Anwendung erlangt hat. Wenn dies zutrifft, erscheint aber ein regelmäßig von Seite zu Seite fortschreitendes Studium des Buches nicht nötig und da es zu zeitraubend und zu anstrengend wäre, auch nicht empfehlenswert. Man möge den Band zuerst einmal unter Überschlagung der meisten Einzelausführungen flüchtig durchgehen, um sich eine ungefähre Kenntnis von den verschiedenen Gegenständen zu verschaffen, die darin behandelt sind. Dann wende man sich getrost, ohne Rücksicht auf die Reihenfolge, zum nähern Studium irgend einer Sache, von der man sich gerade angezogen fühlt oder von der man glaubt, daß man sich einen Nutzen davon versprechen dürfe. Hierbei werden freilich öfters Rückver-

weisungen auf frühere Ausführungen störend sein. Aber über solche Dinge liest man am besten zuerst hinweg, d. h. man nimmt einstweilen als richtig an, was von früher übernommen ist und achtet nur darauf, was an der betreffenden Stelle von neuen Gedanken hinzukommt. Das wird häufig schon die Hauptsache sein. Dann kann man damit beginnen, das vorher Übergangene durch Verfolgung der Rückverweisungen nachträglich noch aufzuklären. Zuletzt wird es häufig nötig sein, den Rechenstift zur Hand zu nehmen, um Zwischenbetrachtungen, die nur angedeutet oder auch ganz weggelassen sind, selbst auszuführen. Wenn man schon weiß, um was sich die ganze Betrachtung dreht, wird man aber mit diesen Einzelheiten viel leichter zustande kommen, als bei einem stetigen Fortschreiten von Seite zu Seite. Ein Leser, der Neigung und Befähigung zu theoretischen Studien mitbringt, wird, wie ich annehme, auf diesem Wege auch den schwierigeren Betrachtungen folgen können, ohne dabei zu erlahmen.

Ausdrücklich möchte ich noch erwähnen, daß der erste Abschnitt, der sich besonders mit den Arbeiten von Mohr zur Festigkeitslehre beschäftigt, nicht als notwendige Vorbedingung für das Verständnis der übrigen Abschnitte zu betrachten ist. Auch sonst ist die Reihenfolge der einzelnen Abschnitte ziemlich willkürlich gewählt.

Am Schlusse des ersten Abschnittes findet man auch die mit der Lehre vom Spannungszustande sehr eng verwandten Betrachtungen über die Momente eines Massensystems. Mit Rücksicht darauf, daß der hier vorliegende Band nur einen Bestandteil des größeren Werkes bildet, in dessen Rahmen diese Betrachtungen gehören, hielt ich es für richtig, sie an dieser Stelle unterzubringen.

Die Überschrift dieses Bandes kündigt die „wichtigsten“ Lehren der Elastizitätstheorie an. In einem Lehrbuche der technischen Mechanik können darunter natürlich nur die für die praktische Anwendung wichtigsten Lehren gemeint sein. Aber auch wenn die Bezeichnung in diesem Sinne verstanden wird, kann man noch verschiedener Ansicht darüber sein, welche

Lehren nun gerade als die wichtigsten zu betrachten seien. Da mag es nun sein, daß mir vielleicht noch manches entgangen ist, was eigentlich hierher gehört hätte. Jeder Wink oder Ratschlag, der sich hierauf bezieht, wird mir sehr willkommen sein und für spätere Auflagen, die diesem Bande etwa beschieden sein sollten, würde ich gern und mit Dank davon Gebrauch machen. An mathematischen Vorkenntnissen werde ich aber natürlich auch in Zukunft nicht mehr bei dem Leser voraussetzen dürfen, als solche in den für die Ingenieure bestimmten Vorlesungen an den technischen Hochschulen erworben werden können.

Bei der Durcharbeitung eines größeren Gebietes zum Zwecke einer selbständigen Darstellung gelangt man gewöhnlich ganz von selbst zu manchen neuen Ergebnissen und solche wird man daher auch in diesem Buche finden. Hierauf habe ich aber bei der Bearbeitung weniger Gewicht gelegt, als auf die Art der Behandlung des ganzen Stoffes, die ich überall so einzurichten suchte, daß man sich bei der vorher besprochenen Benutzungsweise des Buches von dem Studium dauernd angezogen fühlen könnte. In wie weit mir dies gelungen ist, muß ich freilich der Beurteilung meiner Leser überlassen.

München, im Juni 1907.

A. Föppl.

Inhaltsübersicht.

Seite

Erster Abschnitt. Spannungszustand und Bruchgefahr; Momente von Massen . . . . 1—44

§ 1. *Der dreiachsige Spannungszustand* 1
Homogener Spannungszustand 2
Kugel *A* 3
Lineare Vektorfunktionen 6
Gleichheit der wechselseitigen Spannungsprojektionen 7
Hauptebenen 9
Formeln für σ und τ an irgend einer Stelle. 10
Verschiedene Spannungsellipsoide 12

§ 2. *Die graphische Darstellung des Spannungszustandes nach Mohr* 13
Ebene Abbildung des Kugeloktanten 16
Hauptkreis des Spannungszustandes 19

§ 3. *Die Beanspruchung des Materials nach der Theorie von Mohr* 19
Versuchsergebnisse 21
Lage der Gleitflächen 24
Die mittlere Hauptspannung σ_y 24
Die Grenzkurve des Mohrschen Diagramms. 26
Hauptgebrauch der Mohrschen Hypothese bei praktischen Festigkeitsberechnungen 28

§ 4. *Die Momente zweiten Grades eines Massensystems* . . 29
Vektormoment zweiten Grades 30
Zusammenhang mit dem Spannungszustande 32
Hauptträgheitsebenen 33
Auf Achsen bezogene Trägheitsmomente 38
Polares Trägheitsmoment 39
Graphische Darstellung nach Mohr 41

§ 5. *Ersatz eines starren Körpers durch vier oder mehr starr miteinander verbundene materielle Punkte* 41

Zweiter Abschnitt. Elastizitätstheorie der Scheiben und der Platten . . . . Seite 45—144

§ 6. *Vorbemerkungen* 45
Elastische Grundgleichungen; Laplacescher Operator 49
§ 7. *Besondere Gleichungen für den Fall, daß überall σ_z gleich Null gesetzt werden kann* 50
Scheibe und Platte 52
§ 8. *Besondere Gleichungen für den Fall rein ebener Formänderungen* 53
Spannungsfunktion und Spannungsfläche 56
Differentialgleichung (53) für die Spannungsfunktion 58
Staumauer 60
§ 9. *Der Spannungszustand von Scheiben* 61
Spannungsfunktion bei Scheiben von veränderlicher Dicke (Gl. (61)) 64
§ 10. *Behandlung eines Beispiels* 64
Optische Untersuchung des Spannungszustandes einer Scheibe 67
§ 11. *Gleichung für die Spannungsfunktion in Polarkoordinaten* 69
Lösung für eine Kreisscheibe 72
§ 12. *Die reine Biegung des krummen Stabes* 73
Haken 77
§ 13. *Der volle Ring* 81
§ 14. *Das Ringgeschütz* 83
Ungültigkeit der Formeln nach Überschreiten der Proportionalitätsgrenze 89
§ 15. *Allgemeinere Lösungen der Gleichung für die Spannungsfunktion im Ringsektor* 89
§ 16. *Die rotierende Scheibe* 92
Lösungen von Stodola und Grübler 94
§ 17. *Die Biegungsgleichung einer Platte* 97
Gleichgewicht der Kräftepaare am Plattenelement . . 100
Biegungsgleichung (Gl. 106) 105
§ 18. *Lösung der Biegungsgleichung für die elliptische Platte* 106
Größter Spannungswert 108
Verteilung des Auflagerdrucks 109
§ 19. *Die Plattengleichung in Polarkoordinaten* 110
Kreisförmige Platte mit Einzellast in der Mitte . . . 111
§ 20. *Die Platte auf nachgiebiger Unterlage* 112
Lösung von Hertz 113
§ 21. *Anpassung der Lösung an die Grenzbedingungen* . . 120
Unendlich große Platte 123

Seite

§ 22. *Behandlung eines Beispiels* 125
Abweichung der Druckverteilung von der gleichförmigen 127
Desgl. für eine andere Annahme 128
§ 23. *Die elastischen Schwingungen der Platte* 130
§ 24. *Dünne Platten mit großer Ausbiegung* 132
Zwei simultane Gleichungen, von denen die Lösung abhängt, Gl. (164) und (165). 139
Kreisförmige Platte 142
Bodendruck in einem Getreidesilo 143

Dritter Abschnitt. Die Verdrehungselastizität von prismatischen Stäben und von Umdrehungskörpern 145—203

§ 25. *Der rechteckige Stab*. 145
Rechteckähnlicher Querschnitt mit nur zwei geraden Seiten 148
Übergang zum rechteckigen Querschnitt 152
§ 26. *Fortsetzung; Berechnung des Verdrehungswinkels*. . . 156
Formeln für den quadratischen Querschnitt 159
Näherungsformeln für Rechtecke von sehr ungleichen Seitenlängen 160
§ 27. *Fortsetzung; Berechnung der größten Spannung* . . . 161
Vergleich der genauen Werte mit den Näherungsformeln 162
§ 28. *Der regelmäßig dreieckige Querschnitt*. 163
§ 29. *Behandlung des Torsionsproblems mit Hülfe einer Spannungsfunktion* 168
Spannungshügel von Prandtl. 171
§ 30. *Die experimentelle Lösung des Torsionsproblems* . . . 173
§ 31. *Die Torsion von runden Stäben mit veränderlichem Durchmesser* 177
Differentialgleichung, von der die Lösung abhängt, Gl. (209). 181
§ 32. *Der kegelförmige Stab* 186
§ 33. *Die Eigenschaften des Spannungsfeldes im Längsschnitt* 187
Hydrodynamische Abbildung 189
Gleichung für das Spannungsgefäll. 193
Näherungsannahme für den praktischen Gebrauch . . 195
Wellen mit Eindrehung 195
Beanspruchung einer Welle an der Befestigungsstelle eines Rades 196
§ 34. *Ausknicken einer auf Verdrehen beanspruchten langen Welle* 197
Kritische Verdrehungsbelastung 202

Seite

Vierter Abschnitt. Umdrehungskörper mit achsialer symmetrischer Belastung; Wärmespannungen . . . 204—258
§ 35. *Die elastischen Grundgleichungen in Zylinderkoordinaten* 204
§ 36. *Lösungen für den Zylinder* 212
§ 37. *Lösungen mit Hülfe der Potentialfunktionen* 222
Laplacesche Gleichung für das Potential 223
§ 38. *Lösung für den durch eine Ebene einseitig begrenzten Körper* 229
§ 39. *Die Wärmespannungen* 236
Grundgleichungen in rechtwinkligen Koordinaten . . 238
Desgl. in Zylinderkoordinaten 239
§ 40. *Die Wärmespannungen im Hohlzylinder* 240
Hubersche Formeln 245
§ 41. *Das Verhalten der Zylinderenden* 247
Fertige Lösung für den dünnwandigen Zylinder . . . 254
Ausweitung des Zylinderrandes 255
Größte vorkommende Spannung 256

Fünfter Abschnitt. Die allgemeinen Sätze über die Formänderungsarbeit; Eigenspannungen . . . . . 259—310
§ 42. *Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten für elastische Körper* 259
Allgemeine Aussage des Prinzips, Gl. (304) 267
Zusammenhang mit den Sätzen von Castigliano . . 271
§ 43. *Beispiele für die Anwendung des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten* 272
Maxwellscher Satz 275
§ 44. *Die Variation des Spannungszustandes* 282
§ 45. *Beispiele für die Anwendung des Satzes vom variierten Spannungszustande* 288
Allgemeinste Fassung des Castiglianoschen Satzes 291
§ 46. *Die Eigenspannungen* 293
Abhängigkeit des elastischen Verhaltens von den Eigenspannungen 299
§ 47. *Gußspannungen in einer Kugel* 302
Abhängigkeit von der Herstellung 305
Einfachste Annahme 306
Kugelvolumen unabhängig von den Eigenspannungen 307
Experimentelle Ermittelung 308

Sechster Abschnitt. Verschiedene Anwendungen . . 311—372
§ 48. *Die Theorie der Härte von Hertz* 311
Verschiebungskomponenten der Hertzschen Lösung 314
Spannungskomponenten, Gl. (330) 319
§ 49. *Fortsetzung; die Grenzbedingungen an der Druckfläche* 322

Seite

Das Potential V innerhalb der Druckfläche 325

§ 50. *Fortsetzung; Hülfsbetrachtung aus der Potentialtheorie* 326

Potential für kreisförmige Massenverteilung 328

§ 51. *Die Hertzschen Formeln für kreisförmige Druckflächen* 329

Zwei Kugeln 331

Vollkugel und Hohlkugel 332

Gekreuzte Zylinder 333

§ 52. *Die Walzenlager der Brückenträger* 333

Spannungsfunktion des Problems 335

§ 53. *Fortsetzung. Der Spannungszustand in der Nähe der Druckfläche* 342

§ 54. *Die Zusammendrückung der Walze* 345

§ 55. *Die Spannungsverteilung in einem durchlochten Zugstabe nach Kirsch* 352

Spannungsfunktion des Problems 353

Größte Spannung, Gl. (375) 354

Praktische Bedeutung der Lösung 356

§ 56. *Der Spannungszustand in einem lockeren Erdkörper* . 358

Rankinesche Formel 361

Aktiver und passiver Erddruck 362

Richtung der Gleitflächen 363

§ 57. *Anwendbarkeit dieser Betrachtungen auf die Berechnung des Erddrucks gegen Stützmauern* 364

§ 58. *Die Sprödigkeit der Steine* 367

Wertziffer 371

Zusammenstellung der wichtigsten Formeln 373

Sachverzeichnis 389

Erster Abschnitt.

Spannungszustand und Bruchgefahr; Momente von Massen.

§ 1. Der dreiachsige Spannungszustand.

Im ersten Abschnitte des dritten Bandes wurden die Untersuchungen über die allgemeinen Eigenschaften eines beliebigen Spannungszustandes nur so weit durchgeführt, als es für die nächsten Bedürfnisse nötig erschien. Damit reicht man aber nicht immer aus. Hier soll daher die frühere Betrachtung von neuem aufgegriffen werden, wobei aber Alles, was bereits besprochen war, als bekannt vorausgesetzt werden darf.

Es handelt sich also jetzt um die Untersuchung des allgemeinsten Spannungszustandes innerhalb eines unendlich kleinen Bezirks und zwar auf Grund der Gleichgewichtsbedingungen an einem beliebig gestalteten Element des Körpers. Als vollständig beschrieben kann der Spannungszustand erst dann gelten, wenn man für jedes beliebig gestellte Flächenelement innerhalb dieses Bezirks die in ihm übertragene Spannung nach Richtung und Größe anzugeben vermag. Für zwei unendlich benachbarte parallele Schnittflächen unterscheiden sich die auf die Flächeneinheit bezogenen Spannungs-Komponenten unendlich wenig voneinander. Auf diese unendlich kleinen Unterschiede, die freilich, wie sich schon früher zeigte (Bd. III, S. 22) in anderer Hinsicht sehr wichtig sind, soll aber jetzt nicht geachtet werden. Wir behalten uns also vor, diese, wenn es nötig wird, später noch gesondert zu betrachten, während hier nur die von der zweiten Ordnung kleinen Kräfte an der Ober-

fläche eines Körperelementes miteinander verglichen werden sollen, denen gegenüber die Spannungsunterschiede zwischen parallelen Flächen, sowie die Massenkräfte, die beide von der dritten Ordnung unendlich klein sind, vernachlässigt werden können.

Mit anderen Worten heißt dies, daß wir für den Zweck der jetzt beabsichtigten Untersuchung den Spannungszustand innerhalb des unendlich kleinen Bezirks als konstant oder, wie man auch sagt, als homogen betrachten können, womit ausgedrückt werden soll, daß zwei kongruente und parallel gelegene Raumelemente innerhalb des unendlich kleinen Bezirks auf allen gleich gelegenen Flächen dieselben Spannungen erfahren.

Wir wollen uns jetzt nach einem Hilfsmittel umsehen, das uns eine anschauliche Vorstellung von dem Spannungszustande zu bilden gestattet. Zu diesem Zwecke denken wir uns eine Kugel von unendlich kleinem Halbmesser abgegrenzt und betrachten die Spannung, die in jedem Flächenelemente dieser Kugel übertragen wird. Der Spannungszustand innerhalb des Bezirks ist offenbar vollständig bekannt, wenn wir für jedes Element der Kugeloberfläche die dort übertragene, auf die Flächeneinheit bezogene Spannung nach Richtung und Größe anzugeben vermögen, da sich zu jeder Schnittebene, die sich überhaupt durch den unendlich kleinen Bezirk legen läßt, zwei diametral gegenüber liegende Oberflächenelemente der Kugel angeben lassen, die dem Schnitte parallel sind und in denen daher dieselben bezogenen Spannungen übertragen werden. In jedem Punkte der Kugeloberfläche denken wir uns nun eine Strecke angetragen, die in einem beliebig gewählten Maßstabe die Größe und zugleich auch die Richtung der dort auftretenden bezogenen Spannung darstellt. Auch die Pfeilrichtung, nach der wir die Strecke abtragen, soll mit dem Pfeile der von außen her auf die Kugel durch das Flächenelement hindurch übertragenen Kraft übereinstimmen.

Nun mußten wir uns freilich die Kugel so klein denken, daß der Spannungszustand im ganzen Kugelraum als homogen

angesehen werden kann, nämlich so daß er mit dem im Mittelpunkt A der Kugel, auf den sich die Kugel bei fortwährender Verkleinerung ihres Halbmessers schließlich zusammenziehen läßt, überall übereinstimmt. Weil die Kugel im letzten Ziele nur den Zweck hat, den Spannungszustand im Punkte A zu veranschaulichen, wollen wir sie in der Folge auch selbst kurz als die Kugel A bezeichnen. Für den Zweck einer bildlichen Wiedergabe steht aber nichts im Wege, die unendlich kleine Kugel A in entsprechender Vergrößerung zu zeichnen.

Man gelangt dadurch zu einer Zeichnung, wie sie in Abb. 1 wenigstens angefangen ist. Auf der Kugel ist irgend ein Flächenelement dF angegeben, dessen Stellung vollständig durch den Radiusvektor $\mathfrak{r}$ beschrieben wird. Am Endpunkte von $\mathfrak{r}$ ist der Vektor $\mathfrak{s}$ angetragen, der die in dF auftretende bezogene Spannung darstellt. Zu jedem $\mathfrak{r}$ gehört ein bestimmtes $\mathfrak{s}$, d. h. $\mathfrak{s}$ ist eine Funktion von $\mathfrak{r}$, die noch näher zu bestimmen ist. Denkt man sich alle diese $\mathfrak{s}$ aufgetragen, so liegen die Endpunkte auf einer gewissen Fläche.

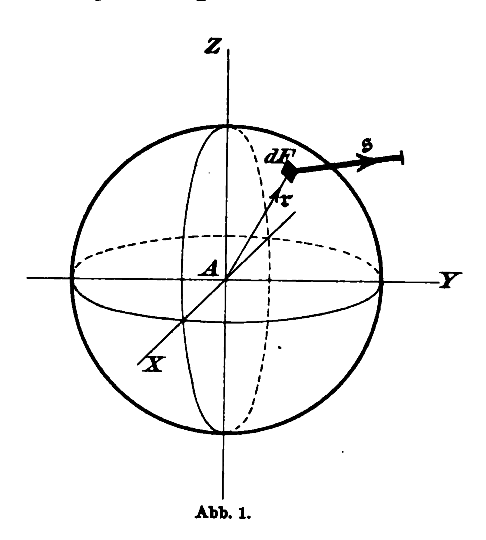


Abb. 1.

Da es auf den Halbmesser der Kugel in der Zeichnung nicht ankommt, wollen wir uns die Vergrößerung weiterhin so gewählt denken, daß dieser Halbmesser gleich der Längeneinheit und der Radiusvektor $\mathfrak{r}$ daher ein Einheitsvektor wird. Bezeichnen wir die Komponenten von $\mathfrak{r}$, d. h. die Projektionen von $\mathfrak{r}$ auf die Richtungen XYZ eines beliebig durch den Mittelpunkt der Kugel gelegten rechtwinkligen Koordinatensystems mit r_1, r_2, r_3, so geben diese Größen zugleich die

Kosinus der Winkel an, die eine im Flächenelemente dF errichtete Normale mit den Koordinatenachsen bildet. Zugleich ist

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1. \tag{1}$$

Die Spannung $\mathfrak{s}$ kann man sich nachträglich auch noch in eine Normalspannung und Schubspannung zerlegt denken, indem man $\mathfrak{s}$ auf die Richtung der Normalen, d. h. auf die Richtung des Einheitsvektors $\mathfrak{r}$ und auf die Tangentialebene der Kugel im Endpunkt von $\mathfrak{r}$ projiziert. Die Normalspannung sei, wie schon früher immer, mit σ oder auch, wenn die Stellung des Flächenelements hervorgehoben werden soll, zu dem sie gehört, mit $\sigma_{\mathfrak{r}}$ bezeichnet; dann hat man, da $\mathfrak{r}$ ein Einheitsvektor ist

$$\sigma_{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r}\mathfrak{s}, \tag{2}$$

worunter das innere Produkt aus $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$ zu verstehen ist.

Die Schubspannung kann in der Tangentialebene noch eine beliebige Richtung haben. Um eine bestimmte Richtung hervorheben zu können, denke ich mir in dieser Richtung ein Kreisbogenelement auf der Kugeloberfläche gezogen, das mit $\delta\mathfrak{r}$ bezeichnet werden kann, da sich dieses Element als ein geometrisches Differential des Vektors $\mathfrak{r}$ ansehen läßt. Das innere Produkt

$$\mathfrak{s} \cdot \delta\mathfrak{r}$$

gibt dann das algebraische Produkt aus der in der Richtung von $\delta\mathfrak{r}$ genommenen Schubspannungs-Komponente und der Länge von $\delta\mathfrak{r}$ an. Zieht man an Stelle von $\delta\mathfrak{r}$, aber in dessen Richtung einen zweiten Einheitsvektor $\mathfrak{r}'$, so kann auch die in dieser Richtung genommene Schubspannungs-Komponente τ selbst ausgedrückt werden durch die Gleichung

$$\tau_{\mathfrak{r}\mathfrak{r}'} = \mathfrak{r}'\mathfrak{s}.$$

Um die Abhängigkeit zu ermitteln, in der $\mathfrak{s}$ von $\mathfrak{r}$ steht, betrachtet man das Gleichgewicht der Spannungen an der Oberfläche eines passend abgegrenzten Körperelementes. Das kann in verschiedener Weise geschehen. Am einfachsten ist es für

uns, auf die bereits fertig vorliegenden Untersuchungen über das Gleichgewicht eines unendlich kleinen Tetraeders im § 5 des dritten Bandes zurückzugreifen.

Die Abbildung des Tetraeders in Aufriß und Grundriß möge zur Erläuterung der damals gebrauchten Bezeichnungen hier nochmals als Abbildung 2 abgedruckt werden. Aus den Gleichgewichtsbedingungen gegen Verschieben in den Richtungen der drei Koordinatenachsen ergaben sich damals drei Gleichungen, die man auch aus der Figur leicht ohne weiteres von neuem wieder ablesen kann, nämlich

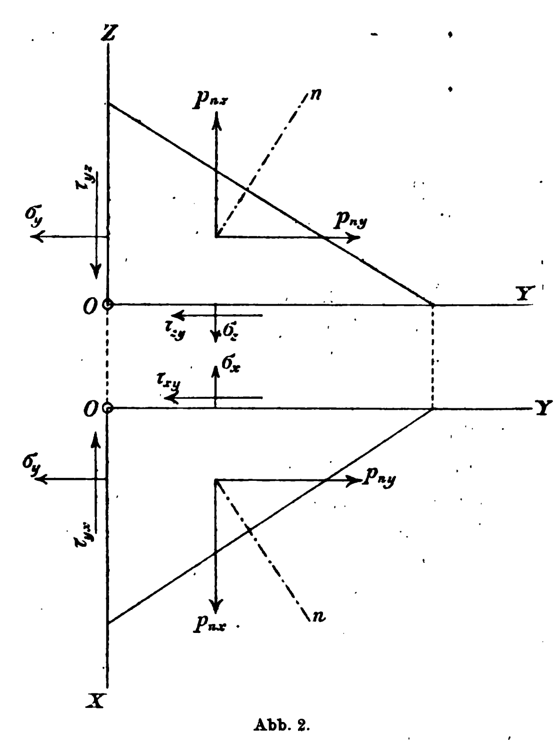


Abb. 2.

$$p_{nx} = \sigma_x \cos(nx) + \tau_{yx} \cos(ny) + \tau_{zx} \cos(nz)$$
$$p_{ny} = \sigma_y \cos(ny) + \tau_{zy} \cos(nz) + \tau_{xy} \cos(nx)$$
$$p_{nz} = \sigma_z \cos(nz) + \tau_{xz} \cos(nx) + \tau_{yz} \cos(ny).$$

Damit sind die Spannungskomponenten für jede vierte Schnittrichtung ermittelt, wenn sie für die Koordinatenebenen als Schnittebenen bekannt sind. Wir wollen diese Gleichungen zunächst noch in jene Bezeichnungen umschreiben, die hier eingeführt wurden. Dann ist an Stelle von p_{nx} jetzt s_1 zu setzen, indem p_{nx} oder s_1 die Komponente von $\mathfrak{s}$ in der Richtung der

X-Achse bedeutet. Ebenso ist nach einer früher schon gemachten Bemerkung cos (nx) durch r_1 zu ersetzen usf. Die Gleichungen lauten dann

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= r_1\sigma_x + r_2\tau_{yx} + r_3\tau_{zx} \\ s_2 &= r_2\sigma_y + r_3\tau_{zy} + r_1\tau_{xy} \\ s_3 &= r_3\sigma_z + r_1\tau_{xz} + r_2\tau_{yz} \end{aligned}\right\} . \tag{3}$$

Hiermit ist die Aufgabe $\mathfrak{s}$ als Funktion von $\mathfrak{r}$ darzustellen, im wesentlichen schon gelöst. Denn für jedes gegebene $\mathfrak{r}$ lassen sich die Komponenten von $\mathfrak{s}$ nach diesen Gleichungen berechnen. Man sieht auch, daß die Komponenten von $\mathfrak{s}$ lineare Funktionen der Komponenten von $\mathfrak{r}$ sind; die Spannungskomponenten σ_x usf. sind bei dieser Darstellung als konstante Koeffizienten anzusehen, da sie ihren Wert nicht ändern, wenn man von einem $\mathfrak{r}$ zu irgend einem andern übergeht.

Eine derartige Abhängigkeit eines Vektors $\mathfrak{s}$ von einem anderen Vektor $\mathfrak{r}$, die sich durch lineare Gleichungen zwischen den Komponenten darstellen läßt, ist von besonders bemerkenswerter Art und kommt in vielen Teilen der mathematischen Physik, namentlich auch in der Dynamik bei der Lehre von den Drehbewegungen, bei der Geometrie der Massen usf. vor. Das ist der Grund dafür, daß Betrachtungen, von der Art, wie wir sie hier vorhaben, sehr häufig wiederkehren. Man sagt, daß in allen diesen Fällen die betrachtete Gesetzmäßigkeit analytisch durch eine lineare Vektorfunktion dargestellt wird. Die Theorie dieser linearen Vektorfunktionen läßt sich rein mathematisch, ohne Bezugnahme auf ein besonderes Beispiel entwickeln und wenn dies geschen ist, braucht man im einzelnen Falle die allgemein gültigen Lehren nur auf diesen Fall anzuwenden. Hier kann ich aber natürlich diese mathematische Theorie nicht als bekannt voraussetzen und ich muß daher jene Eigenschaften der linearen Vektorfunktionen, auf die es hier ankommt, besonders entwickeln.

Gegenüber der allgemeinen Theorie der linearen Vektorfunktionen vereinfacht sich übrigens die Betrachtung in unserem

Falle noch recht wesentlich, weil, wie wir schon wissen, nach dem Satze von der Gleichheit der einander zugeordneten Schubspannungen zwischen den Koeffizienten der Funktion die Beziehungen $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ usf. bestehen. Von diesem Umstande werden wir sofort Gebrauch machen, um einige einfache und wichtige Sätze abzuleiten, die für alle linearen Vektorfunktionen gültig sind, denen diese besondere Eigenschaft zukommt.

Man betrachte zwei beliebige Stellen der Kugel mit den Radienvektoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$ und den zugehörigen Spannungen $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{s}'$. Wir bilden das innere Produkt aus $\mathfrak{r}'$ und $\mathfrak{s}$, also die Projektion von $\mathfrak{s}$ auf den nicht dazu gehörigen, beliebigen anderen Radius $\mathfrak{r}'$. Wegen der Gleichungen (3) erhalten wir dafür

$$\begin{aligned}\mathfrak{r}'\mathfrak{s} &= r_1' s_1 + r_2' s_2 + r_3' s_3\\ &= r_1'(r_1\sigma_x + r_2\tau_{yx} + r_3\tau_{zx}) + r_2'(\cdots) + r_3'(\cdots)\\ &= r_1(r_1'\sigma_x + r_2'\tau_{xy} + r_3'\tau_{xz}) + r_2(r_1'\tau_{yx} + r_2'\sigma_y + r_3'\tau_{yz})\\ &\quad + r_3(r_1'\tau_{zx} + r_2'\tau_{zy} + r_3'\sigma_z).\end{aligned}$$

Wie man sieht, geben aber bei der letzten Art der Zusammenfassung die in den Klammern stehenden Werte nach den Gleichungen (3) die Komponenten des Vektors $\mathfrak{s}'$ an, der zum Radiusvektor $\mathfrak{r}'$ gehört. Man hat daher

$$\mathfrak{r}'\mathfrak{s} = r_1 s_1' + r_2 s_2' + r_3 s_3'$$

oder, da die rechte Seite der Gleichung das innere Produkt aus $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}'$ darstellt, kürzer

$$\mathfrak{r}'\mathfrak{s} = \mathfrak{r}\mathfrak{s}'. \tag{4}$$

Jede der beiden Spannungen liefert daher beim Projizieren auf den andern Radius dieselbe Projektion, wie man auch die beiden Flächenelemente gewählt haben mag. Stehen $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$ senkrecht aufeinander, so spricht Gl. (4) nochmals die Eigenschaft aus, von der wir bei der Ableitung ausgegangen waren, daß die einander zugeordneten Schubspannungen gleich sind. Man kann daher sagen, daß Gl. (4) eine Verallgemeinerung dieses Satzes darstellt.

Wir wollen ferner Gl. (4) auf den Fall anwenden, daß $\mathfrak{r}'$ und $\mathfrak{r}$ unendlich nahe benachbart sind. Dann läßt sich

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} + \delta\mathfrak{r} \quad \text{und} \quad \mathfrak{s}' = \mathfrak{s} + \delta\mathfrak{s}$$

schreiben und wenn man dies in Gl. (4) einsetzt, erhält man nach Wegheben des gleichen Gliedes $\mathfrak{r}\mathfrak{s}$ auf beiden Seiten

$$\mathfrak{s}\delta\mathfrak{r} = \mathfrak{r}\delta\mathfrak{s}. \tag{5}$$

Nun war nach Gl. (2) $\sigma = \mathfrak{r}\mathfrak{s}$ und wenn wir zu einer benachbarten Stelle übergehen, ändert sich die Normalspannung σ um ein Differential $\delta\sigma$, das sich zu

$$\delta\sigma = \mathfrak{r}\delta\mathfrak{s} + \mathfrak{s}\delta\mathfrak{r} = 2\mathfrak{r}\delta\mathfrak{s} = 2\mathfrak{s}\delta\mathfrak{r} \tag{6}$$

berechnet, wenn man bei den letzten Umformungen auf Gl. (5) achtet. Vorher war aber schon darauf hingewiesen worden, daß $\mathfrak{s}\delta\mathfrak{r}$ das algebraische Produkt aus der Länge von $\delta\mathfrak{r}$ und der in dieser Richtung genommenen Schubspannungskomponenten ist. Dieser Schubspannungskomponenten ist daher der Zuwachs proportional, den σ erfährt, wenn wir um $\delta\mathfrak{r}$ auf der Kugeloberfläche fortschreiten. Nun hat die gesamte Schubspannung auf jedem Flächenelement eine ganz bestimmte Richtung und einen bestimmten Pfeil und im Sinne dieses Pfeiles müssen wir daher fortschreiten, um von einer gegebenen Stelle aus möglichst schnell nach einer anderen zu gelangen, an der σ (algebraisch genommen) größer ist. Schreiten wir in dieser Weise fort, so müssen wir schließlich zu einer Stelle gelangen, an der σ seinen größten Wert erreicht. Da sich $\mathfrak{s}$ und daher auch σ überall stetig auf der Kugeloberfläche ändert und (im allgemeinen wenigstens) nicht konstant ist, muß nämlich ein solches analytisches Maximum jedenfalls bestehen. An dieser Stelle ist aber nach den allgemeinen Bedingungen eines Maximums oder Minimums

$$\delta\sigma = 0 \quad \text{und daher auch} \quad \mathfrak{s}\delta\mathfrak{r} = 0$$

und zwar für jedes $\delta\mathfrak{r}$, d. h. die Schubspannung ist an dieser Stelle Null und $\mathfrak{s}$ steht senkrecht auf der Kugelfläche. Die Tangentialebene an die Kugelfläche ist daher nach den schon

im dritten Bande gebrauchten Bezeichnungen eine Hauptebene und die zugehörige Spannung eine Hauptspannung.

Schreitet man entgegengesetzt der Richtung der Schubspannung auf der Kugeloberfläche weiter, so verkleinert sich σ fortwährend, bis man zu einer Stelle gelangt ist, bei der σ zu einem Minimum geworden ist. Auch dort muß die Schubspannung zu Null werden und wir haben eine zweite Hauptebene.

Daß die beiden Hauptebenen, zu denen wir auf diese Weise gelangt sind, senkrecht zueinander stehen müssen, folgt sofort aus Gl. (4), wenn man darin unter $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{s}'$ die beiden Hauptspannungen versteht, von denen wir, nach der Art, wie wir sie ermittelt haben, sicher aussagen können, daß sie verschieden groß sein müssen. Setzen wir also $\mathfrak{s} = s\mathfrak{r}$, um auszudrücken, daß $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{r}$ gleichgerichtet sind und $\mathfrak{s}' = s'\mathfrak{r}'$, so wird nach Gl. (4)

$$s\mathfrak{r}'\mathfrak{r} = s'\mathfrak{r}'\mathfrak{r} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{r}'\mathfrak{r} = 0, \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{r}' \perp \mathfrak{r}.$$

Nur wenn zwei Hauptspannungen von gleicher Größe sind, können die zugehörigen Hauptebenen beliebige Winkel miteinander einschließen; diesen besonderen Fall wollen wir aber zunächst ausschließen. Dann können nur drei Hauptebenen vorkommen, da die dritte auf den beiden vorigen senkrecht stehen muß und hierdurch schon völlig bestimmt ist. Daß diese dritte Ebene in der Tat auch immer eine Hauptebene sein muß, geht sofort aus dem Satze von der Gleichheit der einander zugeordneten Schubspannungen hervor. Man denke sich etwa einen kleinen Würfel herausgeschnitten, dessen Seitenflächen in die bezeichneten Ebenen fallen. Wenn auf zwei benachbarten Seitenflächen keine Schubspannungen vorkommen, muß nach jenem Satze auch die Schubspannung auf der dritten Ebene Null und nach Gl. (6) daher auch für diese Schnittebene $\delta\sigma = 0$ sein.

Nachdem das Bestehen der drei Hauptebenen und der zugehörigen Hauptspannungen nachgewiesen ist, läßt sich die weitere Betrachtung dadurch vereinfachen, daß man die Ko-

ordinatenachsen der XYZ, die vorher willkürlich gezogen waren, jetzt mit den Richtungen der Hauptspannungen zusammenfallen läßt. Die Gleichungen (3) vereinfachen sich dann zu

$$s_1 = r_1 \sigma_x; \quad s_2 = r_2 \sigma_y; \quad s_3 = r_3 \sigma_z. \tag{7}$$

Unter $\sigma_x \sigma_y \sigma_z$ sind jetzt die Hauptspannungen zu verstehen. Dabei mögen die Bezeichnungen so verteilt sein, daß σ_x die algebraisch kleinste Hauptspannung (d. h. entweder die kleinste vorkommende Zugspannung oder die größte Druckspannung), σ_y die mittlere und σ_z die größte Hauptspannung angibt.

Aus den Gl. (7) folgt zunächst, daß die als Koordinatenebenen dienenden Hauptebenen zugleich Symmetrieebenen für den Spannungszustand sind. Betrachtet man nämlich zwei Punkte der Kugelfläche, die zu einer der Koordinatenebene, etwa zur XY-Ebene symmetrisch liegen, so sind r_1 und r_2 für beide gleich und r_3 ist zwar auch von gleicher Größe, aber entgegengesetztem Vorzeichen. Das Gleiche gilt dann nach den Gl. (7) auch von den Spannungskomponenten $s_1 s_2 s_3$, d. h. die Gesamtspannungen $\mathfrak{s}$ sind an beiden Stellen von gleicher Größe und ihre Richtungslinien liegen ebenfalls symmetrisch zur XY-Ebene. Die ganze Kugel A wird daher von den drei Hauptebenen in acht Oktanten mit gleichen und symmetrischen Spannungsverteilungen zerlegt, so daß es weiterhin genügt, die Spannungen für alle Punkte der Oberfläche eines dieser Oktanten, etwa jenes, der zwischen den positiven Koordinatenachsen liegt, näher zu untersuchen.

Für die Normalspannung σ an einer durch die Komponenten $r_1 r_2 r_3$ von $\mathfrak{r}$ gekennzeichneten Stelle erhält man nach den Gleichungen (2) und (7)

$$\sigma = r_1^2 \sigma_x + r_2^2 \sigma_y + r_3^2 \sigma_z. \tag{8}$$

Der Gesamtbetrag der an dieser Stelle auftretenden Schubspannung sei mit τ bezeichnet; dann erhält man aus

$$\tau^2 = \mathfrak{s}^2 - \sigma^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - \sigma^2$$

durch Einsetzen der Werte in (7) und (8) nach einfacher Umformung

$$\tau = \sqrt{r_1^2 r_2^2 (\sigma_y - \sigma_x)^2 + r_1^2 r_3^2 (\sigma_z - \sigma_x)^2 + r_2^2 r_3^2 (\sigma_z - \sigma_y)^2}. \quad (9)$$

Auf die Ermittelung der Richtung von τ in der Tangentialebene, die sich zwar auch leicht durchführen ließe, kann verzichtet werden. Auch aus Gl. (9) erkennt man, daß die Schubspannung nur an den auf den Koordinatenachsen liegenden Punkten der Kugeloberfläche, für die von den drei Richtungskosinus $r_1 r_2 r_3$ zwei Null sind, verschwinden kann, wenn die Hauptspannungen $\sigma_x \sigma_y \sigma_z$ von verschiedener Größe sind. Sind dagegen von den Hauptspannungen zwei oder drei einander gleich, so treten die vorher ausgeschlossenen besonderen Fälle ein, die aber so einfach sind, daß sie jetzt keiner weiteren Erörterung bedürfen.

Wir wollen noch insbesondere die Spannungen an allen Punkten der Kugelfläche miteinander vergleichen, die in einer der drei Koordinatenebenen, etwa in der XY-Ebene liegen. Für diese Punkte ist $r_3 = 0$ und daher nach den Gl. (7) auch $s_3 = 0$. Die Spannung $\mathfrak{s}$ liegt daher selbst in dieser Koordinatenebene, wie übrigens auch schon aus den vorher besprochenen Symmetrieeigenschaften zu schließen gewesen wäre. Die Ausdrücke für σ und τ nach den Gleichungen (8) und (9) vereinfachen sich hier zu

$$\sigma = r_1^2 \sigma_x + r_2^2 \sigma_y \quad \text{und} \quad \tau = r_1 r_2 (\sigma_y - \sigma_x),$$

was mit den im Band III, Gl. (16), S. 32 für den ebenen Spannungszustand abgeleiteten Formeln übereinstimmt, wenn man beachtet, daß in den dort gebrauchten Bezeichnungen $r_1 = \sin \varphi$ und $r_2 = \cos \varphi$ zu setzen ist. Auf das abweichende Vorzeichen von τ kommt es nämlich nicht an, da in den hier abgeleiteten Formeln nur auf den Absolutwert und nicht auf die Richtung von τ geachtet worden ist.

In der Tat sind die Spannungen für die in einer der Koordinatenebenen liegenden Punkte der Kugeloberfläche, wie man aus den Formeln erkennt, ganz unabhängig von der

dritten Hauptspannung, d. h. sie sind ebensogroß als wenn die dritte Hauptspannung Null wäre oder als wenn es sich um einen ebenen Spannungszustand handelte. — Überhaupt folgt aus dem Umstande, daß $\mathfrak{s}$ eine lineare Funktion von $\mathfrak{r}$ ist, daß man sich den dreiachsigen Spannungszustand aus einer Übereinanderlagerung eines ebenen Spannungszustandes mit einem einachsigen zusammengesetzt vorstellen kann, was im dritten Bande schon ausgesprochen, aber noch nicht streng bewiesen war.

Denkt man sich die Spannungen $\mathfrak{s}$, die zu allen Punkten der Kugelfläche gehören, alle von einem gemeinsamen Anfangspunkte aus abgetragen, so liegen die Endpunkte auf einem Ellipsoide, das man als das Spannungsellipsoid bezeichnet. Zwischen den Koordinaten der Endpunkte $s_1 s_2 s_3$ besteht nämlich die aus (7) durch Elimination von $r_1 r_2 r_3$ mit Hülfe von Gl. (1) hervorgehende Gleichung

$$\left(\frac{s_1}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{s_2}{\sigma_y}\right)^2 + \left(\frac{s_3}{\sigma_z}\right)^2 = 1.$$

Die Hauptachsen des Ellipsoids geben demnach die Hauptspannungen an.

Auch wenn man jede Spannung $\mathfrak{s}$ am Ende des zugehörigen Radiusvektors $\mathfrak{r}$ abträgt, wie dies in Abb. 1 (S. 3) angegeben war, liegen die Endpunkte auf einem Ellipsoid, das ausnahmsweise auch in eine ebene, von einer Ellipse begrenzte Fläche übergehen kann. Bezeichnet man nämlich die Koordinaten des Endpunktes von $\mathfrak{s}$ mit $v_1 v_2 v_3$, so hat man

$$v_1 = r_1 + s_1\,; \quad v_2 = r_2 + s_2\,; \quad v_3 = r_3 + s_3,$$

woraus nach Einsetzen aus den Gleichungen (7)

$$\left(\frac{v_1}{1+\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{1+\sigma_y}\right)^2 + \left(\frac{v_3}{1+\sigma_z}\right)^2 = 1$$

folgt. Dass 1 neben σ_x usf. als Summand auftritt, kommt daher, daß der Halbmesser der Kugel gleich 1 gesetzt und auch die Spannungen σ_x usf. durch Strecken dargestellt waren, die in derselben Einheit ausgemessen durch absolute Zahlen angegeben werden. Wenn eine der Hauptspannungen negativ,

also eine Druckspannung ist und der Maßstab, in dem die Spannungen aufgetragen werden sollen, so gewählt wird, daß diese Hauptspannung gleich dem Kugelhalbmesser 1 wird, also z. B. $\sigma_x = -1$, so muß $v_1 = 0$ sein, d. h. das Ellipsoid geht dann in eine elliptisch begrenzte ebene Fläche über.

§ 2. Die graphische Darstellung des Spannungszustandes nach Mohr.

Die schönste graphische Darstellung eines beliebigen Spannungszustandes rührt von Mohr her; sie ist übrigens ebenso wie die Entwickelungen des vorigen Paragraphen auch ganz allgemein auf jede andere lineare Vektorfunktion anwendbar, für die zwischen den Koeffizienten die Beziehungen $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ usf. bestehen, und sie verdient daher auch die Aufmerksamkeit der Mathematiker, die sich mit den Vektorfunktionen beschäftigen. Die Darstellung schließt sich eng an den schon in § 8 des dritten Bandes besprochenen Spannungskreis an, durch den sich der ebene Spannungszustand wiedergeben ließ. In der Tat läßt sich der Spannungskreis unmittelbar zur Darstellung der Spannungen verwenden, die in allen auf einer Hauptebene gelegenen Punkten der Kugeloberfläche auftreten, da, wie wir vorher schon sahen, diese Spannungen ebenso ausfallen, als wenn sie zu einem ebenen Spannungszustande gehörten.

Hier werde ich aber die Entwickelung nicht an jene frühere Betrachtung anlehnen, sondern einen andern Weg einschlagen, der uns die Sache noch von einer anderen Seite her zeigen soll.

In den Gl. (8) und (9) sind σ und τ als Funktionen von $r_1 r_2 r_3$ dargestellt und zwar σ nach Größe und Vorzeichen, τ nur der Größe nach, ohne Berücksichtigung der Richtung oder eines Vorzeichens. Zwischen $r_1 r_2 r_3$ besteht außerdem noch die durch Gl. (1) ausgesprochene Beziehung. Diese drei Gleichungen (1), (8) und (9) lassen sich nun auch nach $r_1 r_2 r_3$ auflösen. Wenn dies geschehen ist, vermag man die

Stelle auf der Kugelfläche anzugeben, auf der σ und τ bestimmt vorgeschriebene Werte annehmen, wobei natürlich vorausgesetzt werden muß, daß die vorgeschriebenen Werte auch wirklich mögliche Werte sind, d. h. daß für sie die Gleichungen reelle Werte von $r_1 r_2 r_3$ als Lösungen liefern.

In allen drei Gleichungen kommen nur die Quadrate der Unbekannten vor; man kann daher für die Auflösung zunächst r_1^2, r_2^2, r_3^2 selbst als Unbekannte betrachten; dann läßt sich leicht zeigen, daß die Gleichungen für diese Unbekannten nur scheinbar vom zweiten, in Wirklichkeit aber vom ersten Grade sind. Auf jedem Kugeloktanten gibt es daher nur einen Punkt, für den σ und τ bestimmt vorgeschriebene Werte annehmen können, vorausgesetzt natürlich, daß nicht einer der besonderen Fälle vorliegt, bei denen zwei oder alle drei Hauptspannungen einander gleich sind, das Spannungsellipsoid also in ein Umdrehungsellipsoid oder in eine Kugel übergeht. Auf jedem anderen Oktanten gibt es einen entsprechend gelegenen Punkt, für den σ und τ wieder dieselben Werte annehmen; das hängt damit zusammen, daß man bei der Auflösung der Gleichungen zunächst nur $r_1^2 r_2^2 r_3^2$ erhält und jeder der Koordinaten $r_1 r_2 r_3$ hernach noch nach Belieben das positive oder negative Vorzeichen geben kann.

Vor allem sei nun die Auflösung der Gleichungen vorgeführt. Der abgekürzten Bezeichnung wegen schreiben wir vorübergehend xyz für $r_1^2 r_2^2 r_3^2$ und abc für $\sigma_x \sigma_y \sigma_z$; dann lauten die Gleichungen (1), (8) und (9)

$$\begin{aligned}
&x + y + z = 1\\
&ax + by + cz = \sigma\\
&xy(b-a)^2 + xz(c-a)^2 + yz(c-b)^2 = \tau^2.
\end{aligned}$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit c und subtrahiert die zweite, um z zu eliminieren, und eliminiert man hierauf ebenso y, so erhält man zwei neue Gleichungen, nämlich

$$\begin{aligned}
x(c-a) + y(c-b) &= c - \sigma\\
x(b-a) + z(b-c) &= b - \sigma.
\end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen multiplizieren wir miteinander und addieren hierauf die dritte der aufzulösenden Gleichungen dazu; dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\tau^2 + (c-\sigma)(b-\sigma) &= x^2(c-a)(b-a) + xy((b-a)^2 + (b-a)(c-b)) \\ &\quad + xz((c-a)^2 + (c-a)(b-c)) + yz((c-b)^2 + (c-b)(b-c)) \\ &= x^2(c-a)(b-a) + xy(b-a)(c-a) + xz(c-a)(b-a) \\ &= (c-a)(b-a)[x^2 + xy + xz] \\ &= (c-a)(b-a)x(x+y+z) \\ &= (c-a)(b-a)x,\end{aligned}$$

wenn bei der letzten Umformung auf die erste der aufzulösenden Gleichungen geachtet wird. Hiernach hat man sofort x: hernach ergeben sich y und z daraus einfach durch zyklische Vertauschung. Man erhält

$$\left.\begin{aligned} x = \frac{\tau^2 + (c-\sigma)(b-\sigma)}{(c-a)(b-a)}; \quad y = \frac{\tau^2 + (a-\sigma)(c-\sigma)}{(a-b)(c-b)}; \\ z = \frac{\tau^2 + (b-\sigma)(a-\sigma)}{(b-c)(a-c)}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Erinnert man sich der Bedeutung der hierin vorkommenden Buchstaben, so geht z. B. die erste dieser Gleichungen über in

$$r_1^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_z - \sigma)(\sigma_y - \sigma)}{(\sigma_z - \sigma_x)(\sigma_y - \sigma_x)} \tag{11}$$

und ähnlich bei den andern.

Zunächst ist hiermit bewiesen, daß es auf jedem Kugeloktanten in der Tat nur eine Stelle gibt, an der σ und τ bestimmte Werte annehmen. Die Lage irgend einer Stelle kann daher auch schon dadurch eindeutig gekennzeichnet werden, daß man angibt, wie groß σ und τ bei ihr werden.

Bei der *Mohrschen* Darstellung trägt man für jeden Punkt des Kugeloktanten das zugehörige σ als Abszisse und den Absolutwert von τ als Ordinate in einem ebenen rechtwinkligen Koordinatensysteme auf. Alle Punkte $\sigma\tau$, die man auf diese Weise erhält, liegen innerhalb eines Flächenstücks, das, wie man sofort sehen wird, von drei Halbkreisen begrenzt wird, die sich paarweise berühren (vgl. Abb. 3, S. 18). Dieses

Flächenstück kann als eine ebene Abbildung des Oktanten angesehen werden, so daß jedem Punkte auf der Oberfläche des Oktanten ein Punkt des Flächenstücks und umgekehrt eindeutig zugeordnet ist. Damit man genau weiß, wo das Flächenelement des Oktanten liegt, dem die Spannungskomponenten σ und τ zugehören, ist nur noch nötig die Zuordnung der Punkte des Flächenstücks und der Punkte des Oktanten festzustellen. Dazu verhelfen uns die Gleichungen (10), die man noch in die Form (11) umschreiben kann.

Denken wir uns nämlich auf der Kugelfläche A drei Scharen von Parallelkreisen gezogen, so daß jede Schar einer der Koordinatenebenen parallel ist, so läßt sich leicht zeigen, daß jeder Viertelkreis davon, der in den betrachteten Oktanten fällt, auf unserem Flächenstücke durch einen Kreisbogen abgebildet wird. Betrachtet man z. B. einen solchen Parallelkreis, der parallel zur YZ-Ebene ist, so ist für alle auf ihm gelegenen Punkte r_1 konstant. Die ihnen im Flächenstücke entsprechenden Punkte liegen daher auf einer Linie, deren Koordinaten $\sigma\tau$ nach Gl. (11) der Gleichung

$$\tau^2 + \sigma^2 - \sigma(\sigma_y + \sigma_z) = r_1^2(\sigma_z - \sigma_x)(\sigma_y - \sigma_x) - \sigma_y\sigma_z \qquad (12)$$

genügen, in der die rechte Seite einen konstanten Wert bildet. Das ist aber in der Tat, wie man aus der Gleichheit der Koeffizienten von σ^2 und τ^2 erkennt, die Gleichung eines Kreises. Man liest auch leicht aus der Gleichung ab (weil nämlich τ nur in dem Gliede τ^2 vorkommt), daß der Mittelpunkt des Kreises auf der Abszissenachse der σ und zwar im Abstande $(\sigma_y + \sigma_z)/2$ vom Ursprunge liegt. Hiernach sind alle Kreisbogen, die den Parallelkreisen derselben Schar entsprechen, konzentrisch zueinander. Der Halbmesser R des Kreises läßt sich ebenfalls nach den einfachsten Lehren der analytischen Geometrie des Kreises sofort ermitteln zu

$$R = \sqrt{r_1^2(\sigma_z - \sigma_x)(\sigma_y - \sigma_x) - \sigma_y\sigma_z + \left(\frac{\sigma_y + \sigma_z}{2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{r_1^2(\sigma_z - \sigma_x)(\sigma_y - \sigma_x) + \left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2}. \qquad (13)$$

Wegen des symmetrischen Baues der Gleichungen (10) lassen sich diese Formeln durch einfache zyklische Vertauschung sofort auch auf die Kreisbogen übertragen, die den zur XZ- oder zur XY-Ebene parallelen Kreisen des Kugeloktanten entsprechen.

Der Faktor r_1^2 schwankt zwischen 0 und 1 und je nachdem man den einen oder anderen Wert einsetzt, erhält man den kleinsten oder den größten Wert von R, der zu den Abbildungskreisen der betreffenden Schar gehört.

Ferner werden auch alle Meridiankreise, die von einer der Ecken des Kugeloktanten ausgehen, in der ebenen Abbildung durch Kreisbogen dargestellt, deren Mittelpunkte auf der Abszissenachse liegen und die sich alle in dem Punkte der Abszissenachse berühren, der die Abbildung der betreffenden Ecke des Kugeloktanten bildet. Man erkennt dies leicht auf dieselbe Weise wie bei den Parallelkreisen. Betrachtet man z. B. einen Meridiankreis des Kugeloktanten, dessen Ebene durch die X-Achse geht, so hat das Verhältnis r_2/r_3 für alle Punkte dieses Kreises denselben Wert. Zwischen den Koordinaten σ und τ der Kurve, durch die der Meridiankreis abgebildet wird, besteht aber nach den Gleichungen (10), wenn man das konstante Verhältnis r_2^2/r_3^2 zur Abkürzung mit α bezeichnet, die Gleichung

$$\alpha = \frac{\tau^2 + \sigma^2 - \sigma(\sigma_x + \sigma_z) + \sigma_x \sigma_z}{\tau^2 + \sigma^2 - \sigma(\sigma_x + \sigma_y) + \sigma_x \sigma_y} \cdot \frac{(\sigma_y - \sigma_z)(\sigma_x - \sigma_z)}{(\sigma_x - \sigma_y)(\sigma_z - \sigma_y)} \qquad (14)$$

die sich noch etwas weiter vereinfachen läßt. Alle in dieser Gleichung vorkommenden Größen sind konstant, bis auf σ und τ und man sieht schon, ohne daß man die Rechnung weiter durchzuführen braucht, daß sich die Gleichung auf die Form

$$\sigma^2 + \tau^2 + a\sigma = b$$

bringen läßt, die einem Kreise entspricht, dessen Mittelpunkt auf der Abszissenachse liegt. Aus Gl. (14) ersieht man auch, daß alle Kreise derselben Schar durch den Punkt der Abszissenachse gehen, der den Abstand σ_x vom Ursprunge hat, was ja auch schon daraus hervorgeht, daß alle Meridiankreise von der

diesem Punkte entsprechenden Ecke des Kugeloktanten ausgehen. Dieser gemeinschaftliche Punkt der Abbildungskreise ist zugleich ein gemeinschaftlicher Berührungspunkt, da er auf der Verbindungslinie aller Mittelpunkte liegt.

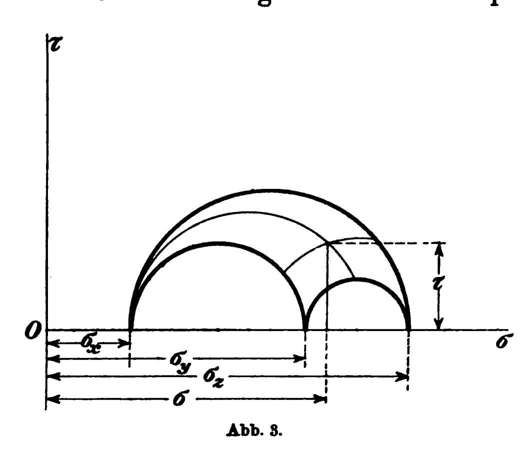


Abb. 3.

Man könnte diese Betrachtungen leicht noch etwas weiter durchführen. Das ist aber nicht nötig; für das Folgende genügt es schon, aus den vorhergehenden Betrachtungen zu entnehmen, daß die ebene Abbildung des Kugeloktanten im Koordinatensystem der $\sigma\tau$ die aus Abb. 3 ersichtliche, von den drei Halbkreisen umgrenzte Gestalt hat. Den Ecken des Oktanten entsprechen die auf der σ-Achse liegenden Punkte mit den Abszissen $\sigma_x \sigma_y \sigma_z$ und die Seiten des Oktanten werden durch die drei Halbkreise dargestellt, die man durch diese drei Punkte legen kann. Außerdem ist in die Figur, um sie nicht zu überladen, nur noch ein Kreisbogen eingetragen, der irgend einem von der Ecke σ_x ausgehenden Merdiankreise entspricht und ein anderer Kreisbogen, der einen zur Hauptebene YZ parallelen Parallelkreis abbildet*). Alle Wertpaare der σ, τ, die überhaupt auf der Kugelfläche vorkommen können, werden hiernach dadurch gekennzeichnet, daß sie in Abb. 3 die Koordinaten eines Punktes bilden müssen, der entweder auf einem

*) Auch die „geographischen Längen und Breiten", die dem Meridiankreise und dem Parallelkreise auf dem Kugeloktanten zukommen, lassen sich leicht in derselben Weise angeben, wie es schon bei der Besprechung des Spannungskreises im dritten Bande gezeigt war. Darauf kommt es aber hier nicht weiter an.

der drei Halbkreise liegt oder in das von ihnen umschlossene Bogendreieck hineinfällt.

Beim Auftragen von Abb. 3 wurde angenommen, daß alle drei Hauptspannungen $\sigma_x \sigma_y \sigma_z$ positiv seien. Sollte dagegen σ_x negativ sein, so wäre es vom Ursprunge O aus nach links hin abzutragen. Man kann sich auch, um auf die Fälle zu kommen, bei denen ein, zwei oder alle drei Hauptspannungen negativ sind, über den vorher betrachteten Spannungszustand noch einen zweiten gelagert denken, der einem nach allen Seiten gleichen hydrostatischen Drucke entspricht. Dann werden $\sigma_x \sigma_y \sigma_z$ alle um denselben Betrag vermindert. Die Figur bleibt dann im übrigen ungeändert; nur der Koordinatenursprung O rückt um den entsprechenden Betrag weiter nach rechts.

Zu irgend einem σ, das zwischen den Grenzen σ_x und σ_z liegt, gehören, wie man aus Abb. 3 entnimmt, noch verschiedene Werte von τ; der größte unter diesen Werten liegt auf dem äußeren der drei Halbkreise. Dieser wird daher von Mohr als der Hauptkreis des Spannungszustandes bezeichnet. Werden zwei von den drei Hauptspannungen einander gleich, so zieht sich die zwischen den drei Halbkreisen liegende Fläche auf den Hauptkreis zusammen, und wenn alle drei Hauptspannungen einander gleich sind, geht sie in einen einzigen Punkt über. Schubspannungen kommen dann überhaupt nicht vor und die Normalspannungen sind für alle Flächenelemente der Einheitskugel gleich groß.

§ 3. Die Beanspruchung des Materials nach der Theorie von Mohr.

Von zwei verschiedenen Spannungszuständen sagt man, daß sie die gleiche Beanspruchung oder Anstrengung des Materials zur Folge haben, wenn der eine Spannungszustand bei proportionaler Vergrößerung aller drei Hauptspannungen eine für den Bestand des Materials gefährliche Grenze, entweder die Elastizitätsgrenze oder die Bruchgrenze erreicht und

2*

auch von dem anderen Spannungszustande die ihm entsprechende Elastizitäts- oder Bruchgrenze erreicht wird, wenn man bei ihm ebenfalls alle drei Hauptspannungen in demselben Maße vergrößert.

Schon dieser Satz ist insofern unbestimmt, als nicht näher angegeben ist, ob die Elastizitäts- oder die Bruchgrenze als die „für den Bestand des Materials gefährliche Grenze" angesehen werden soll. Hierüber sind die Meinungen bereits geteilt. Sie gehen aber noch weiter auseinander, wenn es sich darum handelt, den verlangten Vergleich wirklich auszuführen, also anzugeben, welche Beziehungen zwischen den Hauptspannungen $\sigma_x \sigma_y \sigma_z$ des einen und $\sigma'_x \sigma'_y \sigma'_z$ des anderen Spannungszustandes erfüllt sein müssen, damit etwa beide Spannungszustände grade an der Elastizitätsgrenze liegen.

Eine Entscheidung dieser Frage ist nur auf Grund der Erfahrung möglich. Sie ist aber schwieriger, als es auf den ersten Anblick scheint. Bei der Ausführung eines Festigkeitsversuchs ist es in den meisten Fällen kaum möglich, irgend einen beliebigen Spannungszustand, den man auf seine Wirkung untersuchen möchte, genau herzustellen und die Überschreitung der Elastizitätsgrenze an jener Stelle, an der sie eintritt, mit hinreichender Sicherheit zu beobachten. Man ist daher darauf angewiesen, unter passender Verwertung jener Fälle, in denen dies gelingt, eine Hypothese zu Grunde zu legen, nach der man die Beanspruchung für die anderen Spannungszustände über die noch keine zuverlässigen Beobachtungen vorliegen, abzuschätzen vermag.

Wie schon im dritten Bande auseinandergesetzt wurde, besteht die heutzutage gewöhnlich angenommene Hypothese darin, die Beanspruchung des Materials oder die Bruchgefahr nach der größten positiven oder negativen Dehnung abzuschätzen, die mit einem vorgelegten Spannungszustande verbunden ist. Als Maß der Beanspruchung dient dann einfach die reduzierte Spannung, also jene Spannung, die bei einem einachsigen Spannungszustande dieselbe gefährlichste Dehnung hervorzubringen vermöchte, wie sie in dem zur Beurteilung vorgelegten

Spannungszustande vorkommt. Der einachsige Spannungszustand, der sich bei einem Festigkeitsversuche verhältnismäßig leicht herstellen und auf seine Wirkung untersuchen läßt, dient dann als Vergleichsmaßstab für die Beanspruchung bei allen anderen Spannungszuständen.

Leider hat sich aber gezeigt, daß diese weitverbreitete Annahme den bisher sicher gestellten Beobachtungstatsachen keineswegs entspricht. Es würde zu lange aufhalten, wenn ich dies hier ausführlicher besprechen wollte; es mag genügen, wenn ich auf zwei Fälle hinweise, in denen diese Hypothese im Widerspruche mit den Erfahrungen gefunden wurde. Der erste Fall betrifft die reine Schubbeanspruchung, also einen Spannungszustand, bei dem eine Hauptspannung gleich Null ist, während die beiden andern von gleicher Größe und entgegengesetzten Vorzeichen sind. Die reduzierte Spannung berechnet sich in diesem Falle zu $\tau(m+1)/m$, wenn τ die Schubspannung und m die Poissonsche Konstante bedeutet, die man gewöhnlich ungefähr gleich vier setzen kann. In Übereinstimmung mit diesem Schlusse nimmt man in der Tat gewöhnlich an, daß für einen Wert $\tau = 0{,}8\,\sigma$ die Beanspruchung des Materials dieselbe sei, wie bei einem einachsigen Spannungszustande mit der Hauptspannung σ. Das ist aber im Widerspruch mit zahlreichen Festigkeitsversuchen, nach denen bei Stahl, Flußeisen oder Schweißeisen die Beanspruchung in beiden Fällen vielmehr dann schon gleich groß wird, wenn ungefähr $\tau = 0{,}5\,\sigma$ ist. Der zweite Fall, den ich anführen wollte, bezieht sich auf die „Umschlingungsfestigkeit“, nämlich auf einen Spannungszustand, bei dem ebenfalls eine Hauptspannung gleich Null ist, während die beiden anderen Druckspannungen von gleicher Größe sind. Er wird verwirklicht, wenn man einen Würfel, etwa einen Zement- oder einen Steinwürfel von vier Seiten her einer Druckbelastung aussetzt, während die beiden anderen, einander gegenüber liegenden Seitenflächen unbelastet bleiben, und wenn man zugleich durch eine Schmierung der Druckflächen dafür sorgt, daß auf den belasteten Seitenflächen nur Normalspan-

nungen und keine Reibungen von merklicher Größe übertragen werden können. Nach den zahlreichen Versuchen, die ich hierüber angestellt habe, ist die Umschlingungsfestigkeit ebensogroß wie die Druckfestigkeit, d. h. ebenso groß, wie wenn die Druckbelastung nur auf zwei gegenüber liegenden Würfelseiten einwirkt, während die vier andern Seitenflächen unbelastet bleiben. Nach der üblichen Hypothese müßte dagegen die Umschlingungsfestigkeit größer ausfallen, als die Druckfestigkeit, weil bei dem Umschlingungsversuche kleinere Verkürzungen hervorgerufen werden, als bei dem Druckversuche.

Diese Widersprüche werden von der Mohrschen Hypothese vermieden. Nun läßt sich freilich nicht sagen, daß die Hypothese von Mohr allen bisher vorgebrachten Versuchsergebnissen völlig gerecht würde; nach den Versuchen von Voigt scheint sie bei manchen Materialien zu versagen, obschon dies mit Rücksicht auf die zahlreichen Fehlerquellen, die bei solchen Versuchen unbemerkt mitspielen können, noch nicht als sicher bewiesen gelten kann. Wie dies aber auch sein möge: für die technisch wichtigsten Materialien schließt sich die Hypothese von Mohr den bisher vorliegenden Versuchsergebnissen ohne Zweifel besser an, als alle übrigen Vorschläge, die bisher für die Abschätzung der Bruchgefahr gemacht wurden und namentlich besser als die bis jetzt noch üblichste Bemessung der Beanspruchung nach der reduzierten Spannung. Ich denke daher, daß sie in der Technik mit der Zeit zur allgemeineren Anwendung kommen wird.

Aus der Beobachtung der sogenannten Fließfiguren, die auf der Oberfläche eines blank polierten Metallstabs auftreten, nachdem die Elastizitätsgrenze überschritten ist, läßt sich schließen, daß die bleibende Formänderung, wenigstens bei den Metallen, die diese Erscheinung zeigen, mit einem Gleiten nach bestimmten Richtungen, in den sogenannten Gleitflächen beginnt. Nun muß man freilich bedenken, daß die Metalle nicht völlig homogene Körper, sondern in ihrem Kleingefüge aus

größeren oder kleineren Kristallkörnern aufgebaut sind. Wahrscheinlich sind es in erster Linie die einzelnen Kristallkörner, die in diesen Gleitflächen übereinander weggleiten. Je nach der Art des Kleingefüges werden sich daher die Gleitflächen anders ausbilden können und in der Tat bestehen die Fließfiguren öfters aus ziemlich unregelmäßigen Linienzügen. Sehr häufig zeigen sie aber auch eine sehr bemerkenswerte Regelmäßigkeit, und zwar bestehen sie dann, wenn es sich um einen Metallstab handelt, der einem Zugversuche unterworfen wird, aus zwei Scharen paralleler Linien, die symmetrisch zur Zugrichtung liegen. Es liegt daher sehr nahe, diese augenfällige Erscheinung zur Grundlage für die Aufstellung einer Hypothese über die Beanspruchung des Materials zu wählen.

Betrachten wir nun eine Kugel A, deren Halbmesser zwar noch als klein angesehen werden, dabei aber immerhin groß gegenüber den gewöhnlich nur mikroskopisch kleinen Kristallkörnern sein soll, so fragt es sich, auf welchem Oberflächenelemente der Kugel die günstigsten Bedingungen für ein Gleiten vorliegen. Da die einzelnen Oberflächenelemente sich im übrigen nicht voneinander unterscheiden sollen, wird dies von den Spannungskomponenten σ und τ abhängen, die in dem gesuchten Elemente übertragen werden.

Im allgemeinen wird es sowohl von σ als von τ abhängen, ob ein Gleiten eintreten kann oder nicht. Die Mohrsche Hypothese läßt es, zunächst wenigstens, völlig dahingestellt, zu welchem Anteile oder nach welchem Gesetze die beiden Einzelwerte von σ und τ hierbei mitwirken. Jedenfalls wird aber, wenn man zwei Oberflächenelemente miteinander vergleicht, für die σ denselben Wert hat, jenes die günstigeren Bedingungen für den Eintritt eines Gleitens aufweisen, bei dem τ den größeren Wert hat. Aus der graphischen Darstellung des Spannungszustandes in Abb. 3 geht aber hervor, daß alle Oberflächenelemente, die für ein gegebenes σ den größten Wert von τ haben, auf jener Seite des Kugeloktanten liegen, die in der ebenen Abbildung durch den größten der drei Halbkreise dargestellt wird, der aus diesem Grunde vorher schon

als der Hauptkreis des Spannungszustandes bezeichnet wurde. Wir haben daher zu erwarten, daß die Gleitflächen die Kugel A in Punkten berühren werden, die in der Hauptebene XZ liegen, also in jener Hauptebene, die durch die algebraisch kleinsten und größten Hauptspannungen gelegt ist.

Gegen diese Schlußfolgerungen läßt sich nichts einwenden. Nun wäre es aber immer noch möglich, daß die Lage der Gleitfläche auf dem Kreise in der XZ-Ebene und die Gefahr für den Eintritt eines Gleitens bei bestimmten Werten von σ und τ in dieser Gleitfläche außerdem noch von dem Werte der mittleren Hauptspannung σ_y abhinge, die auf Lage und Größe des Hauptkreises ohne Einfluß ist. Nach der Hypothese von Mohr kommt es aber auf σ_y überhaupt nicht an. Von allen Spannungszuständen, die in σ_x und σ_z übereinstimmen, die also gleiche Hauptkreise haben, wird vielmehr vorausgesetzt, daß sie die gleiche Beanspruchung des Materials herbeiführen.

Theoretisch begründen läßt sich diese Annahme nicht. Sie läßt sich nur dadurch prüfen, daß man die aus ihr hervorgehenden Folgerungen mit den Beobachtungstatsachen vergleicht. Wie ich schon bemerkte, fällt aber dieser Vergleich in den meisten und gerade in den für die praktische Technik wichtigsten Fällen zu ihren Gunsten aus. So sieht man z. B. ohne Weiteres ein, daß nach der Mohrschen Hypothese die Umschlingungsfestigkeit der Steine gleich ihrer Druckfestigkeit ist, was in der Tat nach den zuvor erwähnten Versuchsergebnissen mit der Wirklichkeit übereinstimmt.

In anderen Fällen, insbesondere bei der reinen Schubbeanspruchung, von der ich vorher sprach, läßt sich der Vergleich mit der Mohrschen Hypothese nicht so ohne weiteres durchführen, da die Hypothese so vorsichtig gefaßt ist, daß sie dahin gestellt sein läßt, in welcher Weise die Werte von σ und τ auf dem Hauptkreise zur Herbeiführung der Bruchgefahr oder der Gefahr einer Überschreitung der Elastizitätsgrenze zusammenwirken. Mohr bemerkt, daß sich verschiedene Materialien in dieser Hinsicht verschieden verhalten könnten

und daß es schiene, als wenn namentlich bei den zähen Metallen in vielen Fällen der größte Wert von τ allein den Ausschlag gebe, ohne Rücksicht auf den damit verbundenen Wert von σ. Da der größte Wert von τ, wie aus Abb. 3 zu entnehmen ist, gleich dem Halbmesser des Hauptkreises ist, würden demnach, solange dies zutrifft, zwei Spannungszustände die gleiche Beanspruchung herbeiführen, falls sie nur gleich große Hauptkreise haben, d. h. falls die Differenz $\sigma_z - \sigma_x$ bei beiden gleich ist. Zeichnet man aber zwei Hauptkreise von gleicher Größe, von denen der eine einer einfachen Zugbeanspruchung ($\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, σ_z), der andere einer einfachen Schubbeanspruchung ($\sigma_x = - \sigma_z$, $\sigma_y = 0$) entspricht (Abb. 4), so sieht man, daß τ im letzten Falle gleich der Hälfte von σ_z im ersten Falle wird. Damit stimmt überein, daß nach den Beobachtungen ungefähr $\tau = 0{,}5\,\sigma$ für die gleiche Größe der Beanspruchung zu setzen ist. Insofern, aber freilich nur unter ausdrücklicher Beschränkung auf die vorher genannten besonderen Fälle, ist daher auch hier eine Übereinstimmung der Mohrschen Hypothese mit der Erfahrung nachgewiesen oder genauer gesagt, zunächst wenigstens gezeigt, daß man sich durch weitere Spezialisierung der Hypothese den Beobachtungstatsachen anzuschließen vermag.

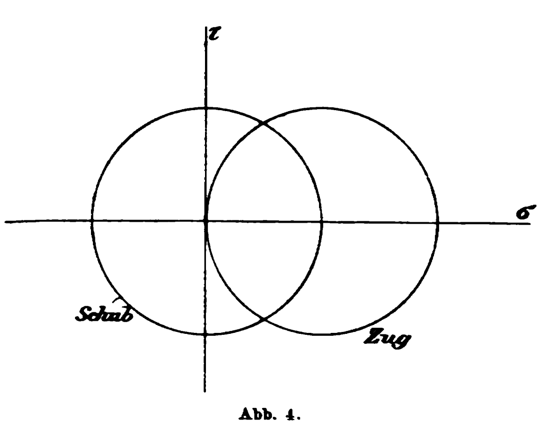


Abb. 4.

Für die allgemeinere Fassung seiner Hypothese bedient sich Mohr einer graphischen Darstellung, die in Abb. 5 wiedergegeben ist. Man denke sich die Hauptkreise aller Spannungszustände, die an einer Grenze, also an der Elastizitäts-

grenze (oder auch an der Bruchgrenze) liegen, im Koordinatensystem der $\sigma\tau$ eingetragen. Dann läßt sich eine Grenzkurve

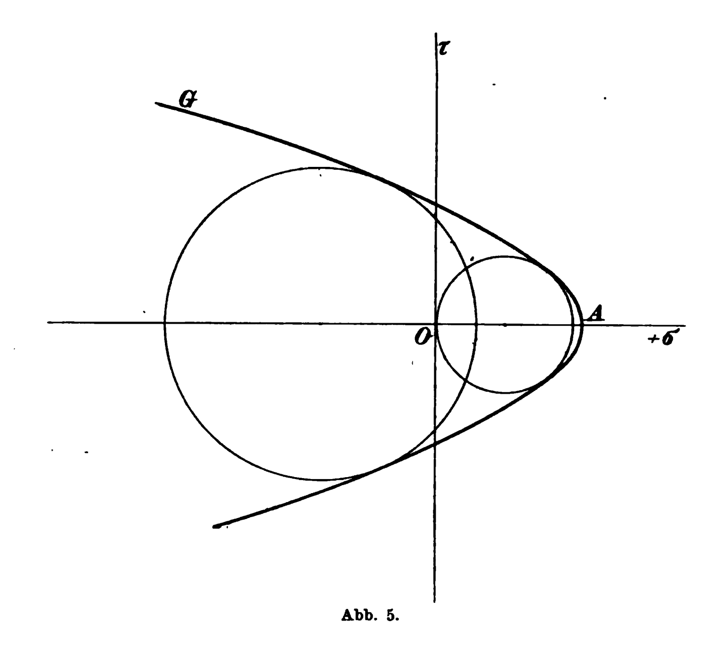


Abb. 5.

G ziehen, die alle diese Hauptkreise einhüllt. Die Kurve schneidet die positive σ-Achse in einem Punkte A, dessen Abszisse die an der Elastizitätsgrenze liegende, von allen Seiten gleich große dreiachsige Zugspannung darstellt ($\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = OA$). Nach links hin verläuft G, wie Mohr annimmt, wahrscheinlich ins Unendliche, ohne die negative σ-Achse zu schneiden. Weiter läßt sich annehmen, daß G der σ-Achse überall die konkave Seite zukehrt.

Über die genauere Gestalt der Grenzkurve sagt die Mohrsche Hypothese nichts aus; vielmehr wird es als Aufgabe der experimentellen Forschung betrachtet, die Gestalt von G für die einzelnen Materialien erst noch näher zu ermitteln, wobei von vornherein als wahrscheinlich zu betrachten ist, daß sie für verschiedene Materialien verschieden ausfallen wird.

Für jene Spannungszustände, die zwischen die einfache Zug- und die einfache Druckbeanspruchung fallen und mit denen man bei den praktischen Anwendungen gewöhnlich zu tun hat, wird es einstweilen als genügend angesehen werden können, die Grenzkurve innerhalb dieses Zwischenraumes durch

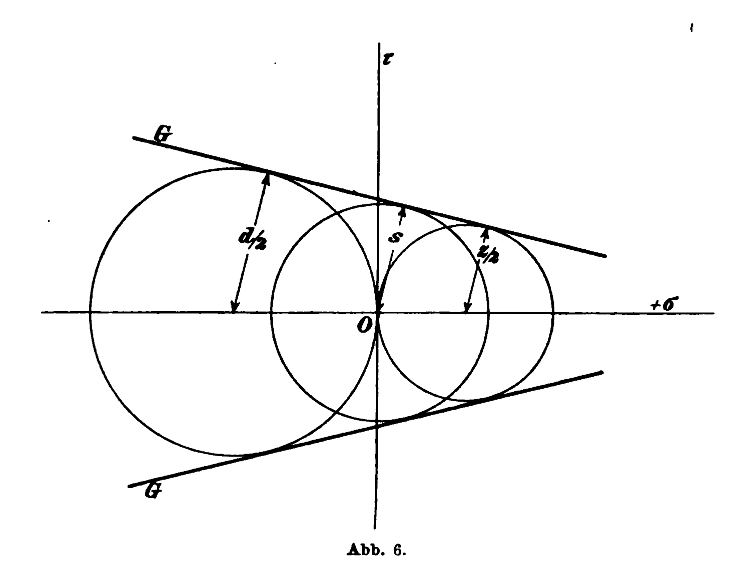


Abb. 6.

eine gerade Linie zu ersetzen, die die beiden Hauptkreise der genannten Spannungszustände berührt. Bezeichnet man die der Grenze entsprechende Zugspannung mit z, die Grenzdruckspannung mit d, so erhält man die Grenzkurve G unter dieser vereinfachenden Annahme, indem man, wie in Abb. 6 geschehen, die beiden Hauptkreise mit den Halbmessern $\frac{d}{2}$ und $\frac{z}{2}$ zieht, die sich im Ursprunge O berühren und von denen der eine links, der andere rechts von der τ-Achse liegt, worauf man eine gemeinschaftliche Tangente an beide Kreise zieht, die auf der zwischen beiden Berührungspunkten liegenden Strecke mit hinlänglicher Annäherung die Grenzkurve G darstellt. In Abb. 6 ist noch ein Hauptkreis eingetragen, der die

Grenzlinie G berührt und dessen Mittelpunkt mit dem Ursprunge zusammenfällt. Dieser Hauptkreis entspricht der reinen Schubbeanspruchung, die ebenfalls gerade an der Grenze (der Elastizitäts- oder Bruchgrenze) liegt. Bezeichnet man den größten Wert der Schubspannung τ bei diesem Spannungszustande, der durch den Halbmesser des Kreises dargestellt wird, mit s, so berechnet sich aus der Figur auf Grund einfacher planimetrischer Sätze s zu

$$s = \frac{zd}{z+d}. \tag{15}$$

Überhaupt führt Gl. (15) die Anstrengung des Materials bei der reinen Schubbeanspruchung auf die Anstrengung bei einachsigem Zug und bei einachsigem Druck zurück unter der Voraussetzung, daß auch z und d Werte der Zug- und Druckspannung darstellen, die einer gleichen Anstrengung des Materials (also etwa gleicher Bruchgefahr) entsprechen. Bei den zähen Metallen sind die Werte von z und d für die Elastizitätsgrenze ungefähr gleich groß. Dann wird G in Abb. 6 parallel zur Abszissenachse und s wird nach Gl. (15) $s = \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}d$, d. h. bei der reinen Schubbeanspruchung bringt eine Schubspannung dieselbe Anstrengung des Materials hervor, wie eine einachsige Zug- oder Druckbeanspruchung, wenn sie halb so groß ist, wie diese. Das stimmt, wie schon früher bemerkt war, mit der Erfahrung überein.

Auch für andere Spannungszustände kann man auf Grund von Abb. 6 die ihnen entsprechende Beanspruchung oder Anstrengung des Materials leicht ermitteln, indem man den zugehörigen Hauptkreis einträgt, der die Grenzkurve G berührt, vorausgesetzt, daß der Berührungspunkt innerhalb der Strecke liegt, für die G als geradlinig angesehen werden kann. Bei einem Materiale, für das z und d gleich groß sind, ist die Beanspruchung innerhalb der angegebenen Gültigkeitsgrenzen einfach der Differenz der Hauptspannungen σ_z und σ_x proportional.

Der Hauptgebrauch der Mohrschen Hypothese bei den praktischen Festigkeitsberechnungen wird im

übrigen darin bestehen, daß nach ihr auf die mittlere Hauptspannung keine Rücksicht zu nehmen, die Beanspruchung vielmehr so einzuschätzen ist, als wenn die mittlere Hauptspannung entweder gleich einer der beiden anderen oder auch, falls diese von verschiedenem Vorzeichen sind, gleich Null wäre.

Zu weiteren praktisch verwendbaren Schlüssen wird die Mohrsche Hypothese erst dann führen können, wenn es der experimentellen Forschung gelungen sein wird, über die Gestalt der Grenzkurven für die verschiedenen Materialien bestimmtere Anhaltspunkte zu liefern, als sie jetzt vorliegen. Dann erst wird sich auch zeigen können, bis zu welchem Grade diese Hypothese der Wirklichkeit entspricht.

§ 4. Die Momente zweiten Grades eines Massensystems.

Bei der Untersuchung der Eigenschaften eines beliebigen dreiachsigen Spannungszustandes in § 1 bemerkte ich schon, daß es sich dabei in letzter Linie eigentlich nur um die einer gewissen Klasse von linearen Vektorfunktionen allgemein zukommenden analytischen Eigenschaften handelte, die sich immer wieder bemerkbar machen, wenn irgend eine bestimmte Gesetzmäßigkeit, mit deren Untersuchung man gerade zu tun hat, durch eine solche lineare Vektorfunktion wiedergegeben wird, was in den verschiedensten Teilen der theoretischen Physik sehr häufig vorkommt. An einem für die technische Mechanik ohnehin sehr wichtigen Beispiele mag dieser Zusammenhang hier noch näher nachgewiesen werden.

Man denke sich eine beliebige Zahl materieller Punkte mit den Massen $m_1 m_2$ usf. gegeben. Die Zahl dieser Punkte kann auch unendlich groß und sie wird insbesondere immer dann unendlich groß sein, wenn damit eine stetige Massenverteilung, wie sie etwa zu einem starren Körper gehört, dargestellt werden soll. Unter den $m_1 m_2$ usf. sind dann Massenelemente zu verstehen. Wir wählen irgend einen Punkt A aus und ziehen von ihm die Radienvektoren $\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2$ usf. zu den

einzelnen Massenelementen. Ferner sei von A aus noch ein Einheitsvektor $\mathfrak{a}$ in beliebiger Richtung gezogen. Die Projektion irgend eines der Radienvektoren $\mathfrak{r}$ auf die Richtung von $\mathfrak{a}$ wird dann durch das innere Produkt $\mathfrak{a}\mathfrak{r}$ nach Größe und Vorzeichen angegeben. Wir bilden nun das Produkt aus dieser Projektion, aus der zugehörigen Masse m und dem Radiusvektor $\mathfrak{r}$. Dieses Produkt ist in der Form $m\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{r}$ zu schreiben; es ist selbst eine gerichtete Größe, deren Richtung mit $\mathfrak{r}$ übereinstimmt, wenn $\mathfrak{a}\mathfrak{r}$ das positive Vorzeichen hat, d. h. wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{r}$ einen spitzen Winkel miteinander einschließen. Im anderen Falle ist das Produkt entgegengesetzt gerichtet mit $\mathfrak{r}$. Für alle Massen m sei dieses Produkt gebildet, worauf alle Glieder, die auf diese Weise erhalten werden, geometrisch summiert werden sollen. Dadurch erhalten wir wiederum eine gerichtete Größe $\mathfrak{A}$, die in der Form

$$\mathfrak{A} = \sum m\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{r} \tag{16}$$

geschrieben werden kann. Wir nennen diese Größe $\mathfrak{A}$ das Vektormoment zweiten Grades für die gegebene Massenverteilung in bezug auf den Punkt A und die durch ihn gehende Achse, deren Richtung und Richtungssinn durch den Einheitsvektor $\mathfrak{a}$ beschrieben wird.

Zerlegt man die Vektoren in ihre Komponenten nach den Richtungen eines rechtwinkligen Koordinatensystems, dessen Ursprung mit A zusammenfällt, so hat man

$$\mathfrak{a}\mathfrak{r} = a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3$$

und für die Komponenten von $\mathfrak{A}$ erhält man

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \sum m r_1 (a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3) \\ A_2 &= \sum m r_2 (a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3) \\ A_3 &= \sum m r_3 (a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3) \end{aligned}\right\} . \tag{17}$$

Da die Komponenten von $\mathfrak{A}$ von den Quadraten und Produkten der Koordinaten $r_1 r_2 r_3$ der Massen abhängen, wird $\mathfrak{A}$ als ein Moment zweiten Grades der Massen bezeichnet.

Jetzt wollen wir uns indessen überlegen, wie $\mathfrak{A}$ von der Richtung der Achse oder also des vorher beliebig gezogenen Einheitsvektors $\mathfrak{a}$ abhängt. Wie aus den Gleichungen (16) und (17) hervorgeht, ist $\mathfrak{A}$ eine lineare Vektorfunktion von $\mathfrak{a}$, geradeso wie in § 1 die Spannung $\mathfrak{s}$ als eine lineare Vektorfunktion des dort mit $\mathfrak{r}$, hier aber mit $\mathfrak{a}$ bezeichneten Einheitsvektors gefunden worden war. Auch die besondere Beziehung zwischen den Koeffizienten, die sich damals in $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ usf. ausdrückte, besteht für die Funktion $\mathfrak{A}$ in der gleichen Weise. Um dies besser hervortreten zu lassen und einen unmittelbaren Vergleich mit den Gleichungen (3) von § 1 zu ermöglichen, kann man die Gleichungen (17) noch in der Form

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= a_1 \sum m r_1^2 + a_2 \sum m r_1 r_2 + a_3 \sum m r_1 r_3 \\ A_2 &= a_2 \sum m r_2^2 + a_3 \sum m r_2 r_3 + a_1 \sum m r_1 r_2 \\ A_3 &= a_3 \sum m r_3^2 + a_1 \sum m r_1 r_3 + a_2 \sum m r_2 r_3 \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

anschreiben. Denkt man sich insbesondere einen Spannungszustand, dessen Spannungskomponenten σ_x usf. durch die Werte

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_x = \sum m r_1^2, \qquad \sigma_y = \sum m r_2^2, \qquad \sigma_z = \sum m r_3^2 \\ &\tau_{xy} = \tau_{yx} = \sum m r_1 r_2, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \sum m r_1 r_3, \\ &\qquad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \sum m r_2 r_3 \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

angegeben werden, so stimmen die Gleichungen (18) mit den Gleichungen (3) vollständig überein, wenn man sich noch erinnert, daß hier $a_1 a_2 a_3$ dieselbe Bedeutung haben, wie die früher dafür gebrauchten Bezeichnungen $r_1 r_2 r_3$, die hier in anderem Sinne verwendet sind. Wir sehen daher, daß sich die Verteilung der Vektormomente um einen gegebenen Punkt A herum stets vollständig durch einen Spannungszustand $\mathfrak{S}$ um denselben Punkt herum abbilden läßt. Es ist daher gar nicht nötig, die Eigenschaften der Vektormomente jetzt nochmals ausführlich abzuleiten; es genügt vielmehr, auf die früher für den Spannungszustand gegebenen Entwickelungen zu verweisen, die sich auf den hier vorliegenden Fall ohne weiteres übertragen lassen.

Die in den Gleichungen (18) und (19) vorkommenden Summengrößen werden ebenfalls als Momente zweiten Grades der Massenverteilung bezeichnet. $\Sigma m r_1^2$ heißt das Trägheitsmoment Θ_x der Massen in bezug auf die zur X-Richtung senkrechte Koordinatenebene YZ, von der die Massen die senkrechten Abstände r_1 haben. Ebenso wird $\Sigma m r_1 r_2$ das Zentrifugalmoment Φ_{xy} der Massen in bezug auf die beiden Koordinatenebenen YZ und XZ genannt. Mit diesen Bezeichnungen schreiben sich die Gleichungen (19) einfacher

$$\left.\begin{array}{lll} \sigma_x = \Theta_x, & \sigma_y = \Theta_y, & \sigma_z = \Theta_z \\ \tau_{xy} = \Phi_{xy}, & \tau_{xz} = \Phi_{xz}, & \tau_{yz} = \Phi_{yz} \end{array}\right\}. \tag{20}$$

E i n e r N o r m a l s p a n n u n g i m S p a n n u n g s z u s t a n d e e n t s p r i c h t d a h e r e i n T r ä g h e i t s m o m e n t a l s K o m p o n e n t e d e r V e r t e i l u n g d e r V e k t o r m o m e n t e u m d e n P u n k t A h e r u m u n d e i n e r S c h u b s p a n n u n g e n t s p r i c h t e i n Z e n t r i f u g a l m o m e n t.

Übrigens ist darauf hinzuweisen, daß ein Trägheitsmoment seiner Definition nach stets eine positive Größe ist, wenigstens solange man nur positive Massen zuläßt, die für die Mechanik allein in Frage kommen. Dagegen können die Zentrifugalmomente sowohl positiv als negativ oder auch Null sein.

Hieraus geht hervor, daß man zwar jeder Verteilung der Vektormomente um einen Punkt A herum einen Spannungszustand zuordnen kann, durch den sie abgebildet wird, aber nicht umgekehrt jedem beliebig gegebenen Spannungszustande eine Verteilung von Vektormomenten eines Massensystems von lauter positiven Massen. Diese umgekehrte Zuordnung ist vielmehr nur unter der Voraussetzung möglich, daß in dem Spannungszustande die algebraisch kleinste Hauptspannung σ_x keine Druckspannung, sondern entweder auch eine Zugspannung oder mindestens gleich Null ist. Der Spannungszustand bildet daher einen etwas allgemeineren Fall der linearen Vektorfunktion als die Verteilung der Vektormomente. Indessen ist dieser Unterschied verhältnismäßig geringfügig und er wird auch nur dadurch bedingt, daß man sich in der Mechanik

auf die Betrachtung von lauter positiven Massen beschränken kann.

Bei der Untersuchung der Eigenschaften des Spannungszustandes bildete Gl. (4)

$$\mathfrak{r}'\mathfrak{s} = \mathfrak{r}\mathfrak{s}'$$

die Grundlage für alle weiteren Entwickelungen. Es mag noch gezeigt werden, daß die entsprechende Gleichung auch hier gilt. Man denke sich also außer dem Einheitsvektor $\mathfrak{a}$ noch irgend einen anderen $\mathfrak{a}'$ gezogen und projiziere $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{a}'$; dann erhält man nach Gl. (16)

$$\mathfrak{a}'\mathfrak{A} = \sum m\mathfrak{a}'\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{r} = \mathfrak{a}\sum m\mathfrak{a}'\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r} = \mathfrak{a}\mathfrak{A}'.$$

Aber schon dieser Nachweis wäre nicht mehr nötig gewesen, nachdem schon gezeigt war, daß sich $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{s}$ abbilden läßt, so daß alle Eigenschaften von $\mathfrak{A}$ aus denen von $\mathfrak{s}$ gefolgert werden können. Es hätte daher keinen Zweck, alle Betrachtungen von § 1 und § 2 hier von neuem zu wiederholen; es genügt vielmehr die Bemerkung, daß sie unverändert gültig bleiben, nachdem man die dort vorkommenden Buchstabenbezeichnungen durch die ihnen hier entsprechenden ersetzt hat. Insbesondere gibt es also im allgemeinen drei aufeinander senkrecht stehende Ebenen, für die die Zentrifugalmomente Null sind, während die Trägheitsmomente für sie zu einem Maximum oder Minimum werden. Das sind die durch den Punkt A gehenden Hauptträgheitsebenen und die ihnen entsprechenden Hauptträgheitsmomente. Trägt man die Vektormomente $\mathfrak{A}$ des Punktes A für alle Richtungen von $\mathfrak{a}$ von einem gemeinsamen Anfangspunkte ab, so erhält man ein Ellipsoid, das im allgemeinen ein dreiachsiges ist, in Ausnahmefällen aber auch in ein Rotationsellipsoid oder in eine Kugel übergehen kann, ganz wie im Falle des Spannungszustandes. Auch die graphische Darstellung des Spannungszustandes nach Mohr kann ohne weiteres übernommen werden.

Dagegen ergibt sich ein wesentlicher Unterschied, sobald man den Punkt A, auf den sich diese Betrachtungen bezogen,

durch einen anderen ersetzt. In den vorhergehenden Paragraphen beschränkte sich die Betrachtung ausschließlich auf die Untersuchung des Spannungszustandes an einer bestimmten Stelle des Raumes. Die Änderungen, die sich im Spannungszustande ergeben, wenn man von dieser Stelle zu benachbarten Stellen weitergeht, wurden freilich schon im dritten Bande in Betracht gezogen und in den Gleichgewichtsbedingungen der Spannungen an einem unendlich kleinen Parallelepiped zum Ausdruck gebracht, woraus dann im letzten Abschnitte des dritten Bandes unter Heranziehung des Elastizitätsgesetzes die elastischen Grundgleichungen hervorgingen. Diesen ist in der Geometrie der Massen keine entsprechende Beziehung zur Seite zu stellen. Hier sind vielmehr die Änderungen von $\mathfrak{A}$ und den davon abhängigen Trägheits- und Zentrifugalmomenten, die mit einer Änderung des Ortes von A verbunden sind, von weitaus einfacherer Art als beim Spannungszustande. Der Grund für dieses verschiedene Verhalten liegt ausschließlich darin, daß zwar $\mathfrak{s}$ sowohl als $\mathfrak{A}$ lineare Vektorfunktionen des von demselben A aus gezogenen Einheitsvektors $\mathfrak{r}$ oder $\mathfrak{a}$ sind, daß aber die Abhängigkeit von dem Vektor, der die Lage von A beschreibt, bei beiden durchaus verschieden und nicht durch eine lineare Vektorfunktion, sondern namentlich bei $\mathfrak{s}$ durch eine viel verwickeltere Funktion darzustellen wäre, die überdies gar nicht explizit gegeben, sondern nur aus Differentialbeziehungen im Zusammenhange mit Grenzbedingungen zu ermitteln ist.

Für die Momente des Massensystems läßt sich dagegen die Abhängigkeit vom Orte des Punktes A in viel einfacherer Weise darstellen. Man betrachte einen zweiten Punkt B und ziehe, um die Lage von B gegen A zu beschreiben, einen Radiusvektor $\mathfrak{p}$, der von B nach A hin geht. Das Massenteilchen m, das von A den Radiusvektor $\mathfrak{r}$ hatte, hat nun von B aus den Radiusvektor $\mathfrak{r} + \mathfrak{p}$. Das Vektormoment für den Punkt B, das zum Einheitsvektor $\mathfrak{a}$ gehört, der parallel zu dem Einheitsvektor $\mathfrak{a}$ gerichtet sein soll, der schon am Punkte A benutzt worden war, mag jetzt mit $\mathfrak{B}$ bezeichnet werden;

es kann nach der Vorschrift von Gl. (16) leicht gebildet werden, indem man $\mathfrak{r}$ durch $\mathfrak{r}+\mathfrak{p}$ ersetzt. Man erhält also

$$\mathfrak{B} = \sum m(\mathfrak{r}+\mathfrak{p}) \cdot \mathfrak{a}(\mathfrak{r}+\mathfrak{p}).$$

Indem man die Klammern auflöst und die Summe dementsprechend in vier Glieder zerlegt, findet man zunächst

$$\mathfrak{B} = \sum m\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{r} + \sum m\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{r} + \sum m\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{p} + \sum m\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{p}.$$

Das erste Glied dieser Summe stellt das auf den Punkt A bezogene Vektormoment $\mathfrak{A}$ vor. Bei den drei letzten Gliedern ist zu beachten, daß $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{p}$ bei der Summierung konstant sind und daß man diese konstanten Faktoren herausheben kann. Dadurch geht $\mathfrak{B}$ über in

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A} + \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{a} \sum m\mathfrak{r} + \mathfrak{a}\mathfrak{p} \cdot \sum m\mathfrak{r} + \mathfrak{a}\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p} \sum m.$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, daß eine wesentliche Vereinfachung der Darstellung erzielt wird, **wenn man den zuerst beliebig angenommenen Punkt A weiterhin mit dem Schwerpunkt der Massenverteilung zusammenfallen läßt.** Nach der früher vorgetragenen Lehre vom Schwerpunkt wird nämlich in diesem Falle

$$\sum m\mathfrak{r} = 0$$

und für den Punkt B, der nun immer noch eine beliebige Lage im Massensysteme haben kann, erhält man das Vektormoment zu

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A} + \mathfrak{a}\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p} M, \tag{21}$$

wenn noch zur Vereinfachung die Gesamtmasse mit M bezeichnet wird. Hiernach ist das Vektormoment eine Vektorfunktion zweiten Grades des die Lage von B bestimmenden Vektors $\mathfrak{p}$. Besonders zu beachten ist ferner, daß das Glied, um das sich $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$ voneinander unterscheiden, parallel zum Vektor $\mathfrak{p}$ ist. Ersetzt man $\mathfrak{p}$ durch $-\mathfrak{p}$, ohne sonst etwas zu ändern, so bleibt das Vektormoment ungeändert. Punkten, die in entgegengesetzten Richtungen gleiche Abstände vom Schwerpunkte haben, entsprechen daher gleiche Vektormomente für die gleiche Richtung des Einheitsvektors $\mathfrak{a}$. Ferner haben

alle Punkte, die in einer zum Einheitsvektor $\mathfrak{a}$ senkrechten und durch den Schwerpunkt gehenden Ebene liegen, das gleiche Vektormoment für diese Richtung von $\mathfrak{a}$, da für sie $\mathfrak{a}\mathfrak{p}$ zu Null wird.

Auch sonst lassen sich noch manche Beziehungen aus der einfachen Gleichung (21) herauslesen, so, indem man berücksichtigt, daß das letzte in ihr vorkommende Glied von demselben Bau ist wie die einzelnen Glieder des Summenausdruckes für $\mathfrak{A}$ in Gl. (16). Vor allem sind es aber die Beziehungen für die Komponenten von $\mathfrak{B}$, d. h. für die Trägheits- und Zentrifugalmomente, die noch eine nähere Besprechung erfordern.

Durch den Einheitsvektor $\mathfrak{a}$ wird eine zu ihm senkrecht stehende durch den Punkt B gehende Ebene bestimmt, die auch selbst kurz als eine Ebene $\mathfrak{a}$ bezeichnet werden kann. Die Normalkomponente von $\mathfrak{B}$ zu dieser Ebene, d. h. die Projektion von $\mathfrak{B}$ auf den Einheitsvektor $\mathfrak{a}$, gibt, wie schon früher hervorgehoben war, das Trägheitsmoment Θ der Masse in bezug auf die durch den Punkt B gehende Ebene $\mathfrak{a}$ an. So wird das Trägheitsmoment für die durch den Schwerpunkt A gehende Ebene $\mathfrak{a}$ nach Gl. (16) gleich

$$\Theta_{A,\mathfrak{a}} = \mathfrak{A}\mathfrak{a} = \sum m(\mathfrak{a}\mathfrak{r})^2$$

und für die dazu parallele, durch den beliebigen Punkt B gehende Ebene $\mathfrak{a}$ erhält man nach Gl. (21)

$$\Theta_{B,\mathfrak{a}} = \mathfrak{B}\mathfrak{a} = \Theta_{A,\mathfrak{a}} + M(\mathfrak{a}\mathfrak{p})^2. \tag{22}$$

Das innere Produkt $\mathfrak{a}\mathfrak{p}$ gibt den senkrechten Abstand beider Ebenen $\mathfrak{a}$ an. Von allen parallelen Ebenen hat daher die durch den Schwerpunkt gehende das kleinste Trägheitsmoment und für die übrigen wird es aus diesem gefunden, indem man das Produkt aus der Gesamtmasse M und dem Quadrate des senkrechten Abstandes vom Schwerpunkte hinzufügt.

Projiziert man dagegen $\mathfrak{B}$ auf die Ebene $\mathfrak{a}$, so erhält man die der Schubspannungskomponente des zugeordneten Spannungs-

zustandes entsprechende Komponente von $\mathfrak{B}$, die ein gerichtetes Zentrifugalmoment bedeutet, nämlich eine Größe, die in der Ebene $\mathfrak{a}$ noch irgend eine Richtung haben kann und deren Komponenten innerhalb der Ebene Zentrifugalmomente im gewöhnlichen Sinne bedeuten. Legt man nämlich in der Ebene $\mathfrak{a}$ durch den Punkt B noch irgend einen anderen Einheitsvektor $\mathfrak{a}'$, dem eine zu ihm senkrecht stehende Ebene $\mathfrak{a}'$ entspricht, so sind zunächst die Ebenen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ senkrecht zueinander und ebenso die Einheitsvektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$, so daß ihr inneres Produkt Null ist. Man findet dann die Komponente des gerichteten Zentrifugalmoments innerhalb der Ebene $\mathfrak{a}$, genommen nach der darin beliebig festgelegten Richtung $\mathfrak{a}'$, indem man das ganze $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{a}'$ projiziert, da die Normalkomponente von $\mathfrak{B}$ zu dieser Projektion nichts beiträgt. Die auf diese Weise ermittelte Komponente von $\mathfrak{B}$ ist das Zentrifugalmoment $\Phi_{B\mathfrak{a}\mathfrak{a}'}$ der Massen für die durch den Punkt B gehenden Ebenen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$. So wird insbesondere nach Gl. (16)

$$\Phi_{A\mathfrak{a}\mathfrak{a}'} = \sum m \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{a}'\mathfrak{r}$$

und nach Gl. (21) erhält man für die dazu parallelen, aber durch den beliebigen Punkt B gehenden Ebenen das Zentrifugalmoment zu

$$\Phi_{B\mathfrak{a}\mathfrak{a}'} = \mathfrak{B}\mathfrak{a}' = \Phi_{A\mathfrak{a}\mathfrak{a}'} + M \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{a}'\mathfrak{p}. \tag{23}$$

Hiernach kann auch das Zentrifugalmoment für irgend zwei zueinander senkrecht stehende Ebenen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ sofort berechnet werden, wenn es für die dazu parallelen Schwerpunktsebenen bereits bekannt ist. Dabei ist zu beachten, daß die inneren Produkte $\mathfrak{a}\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{a}'\mathfrak{p}$ die senkrechten Abstände der Ebenen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ vom Schwerpunkte nach Größe und Vorzeichen angeben.

Wenn die durch den Schwerpunkt A gehende Ebene $\mathfrak{a}$ eine Hauptträgheitsebene ist, wird $\Phi_{A\mathfrak{a}\mathfrak{a}'}$ für jedes zu $\mathfrak{a}$ senkrecht stehende $\mathfrak{a}'$ zu Null, wie dies schon früher besprochen war. Soll nachher auch die durch den Punkt B parallel gezogene

Ebene $\mathfrak{a}$ für diesen Punkt eine Hauptträgheitsebene sein, so muß auch $\Phi_{B\mathfrak{a}\mathfrak{a}'}$ für jedes zu $\mathfrak{a}$ senkrechte $\mathfrak{a}'$ zu Null werden, d. h. es muß nach Gl. (23)

$$\mathfrak{a}\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{a}'\mathfrak{p} = 0$$

sein. Das ist auf zwei Arten möglich. Zunächst nämlich trifft es zu, wenn $\mathfrak{a}\mathfrak{p} = 0$ ist, d. h. wenn der zwischen B und A gezogene Radiusvektor $\mathfrak{p}$ senkrecht zum Einheitsvektor $\mathfrak{a}$ steht, oder mit anderen Worten, wenn der Punkt B in der durch den Schwerpunkt gehenden Hauptträgheitsebene $\mathfrak{a}$ liegt. Die durch den Schwerpunkt gehenden Hauptträgheitsebenen sind demnach zugleich Hauptträgheitsebenen für alle auf ihnen liegenden Punkte B. Zweitens wird aber die Bedingung auch erfüllt, wenn $\mathfrak{a}'\mathfrak{p} = 0$ ist. Das kann aber für jedes beliebige, zu $\mathfrak{a}$ senkrecht stehende $\mathfrak{a}'$ nur dann zutreffen, wenn $\mathfrak{p}$ gleich oder entgegengesetzt gerichtet mit $\mathfrak{a}$ ist. Für alle auf den Hauptträgheitsachsen des Schwerpunktes liegenden Punkte sind daher die drei Hauptträgheitsebenen parallel zu denen des Schwerpunktes. Der letzte Fall ist übrigens im vorhergehenden schon mit enthalten, da ein auf einer Hauptträgheitsachse des Schwerpunktes liegender Punkt gleichzeitig in zwei Hauptträgheitsebenen des Schwerpunktes enthalten ist und die dritte Hauptträgheitsebene durch die Stellung der beiden ersten schon mit bestimmt ist. In allen anderen als den hier besprochenen Fällen sind die Hauptträgheitsebenen des Punktes B nicht parallel mit denen des Schwerpunktes gestellt.

Bisher war in diesem Paragraphen nur von Trägheitsmomenten die Rede, die in bezug auf Ebenen genommen waren, weil für diese die einfachsten Beziehungen bestehen. Für die praktische Anwendung wichtiger sind aber die auf Achsen bezogenen Trägheitsmomente. Diese lassen sich indessen aus den anderen in einfacher Weise ableiten. Man denke sich durch die gegebene Achse zwei zueinander senkrechte Ebenen gelegt. Dann ist nach dem Pythagoräischen Lehrsatze das Quadrat des Abstandes jeder Masse von der Achse gleich der

Summe der Quadrate der Abstände von den beiden Ebenen. Daher ist auch das Trägheitsmoment für die Achse gleich der Summe der Trägheitsmomente für die beiden Ebenen. Zieht man ferner zwei parallele Achsen, von denen eine durch den Schwerpunkt geht, so folgt aus der Anwendung des durch Gl. (22) ausgesprochenen Satzes auf die beiden zueinander senkrechten Ebenen durch die eine Achse und die zu ihnen parallelen durch die Schwerpunktsachse, daß auch das Trägheitsmoment für jene Achse aus dem Trägheitsmomente für die parallele Schwerpunktsachse gefunden wird, indem man das Produkt aus der gesamten Masse und dem Quadrate des senkrechten Abstandes beider Achsen voneinander hinzufügt.

Eine andere Beziehung ergibt sich noch unter Hinzunahme des polaren Trägheitsmomentes. Darunter ist die Summe der Produkte aus allen einzelnen Massen und den Quadraten ihrer Abstände von irgend einem Punkte B zu verstehen, der hierbei als Pol angenommen wird. Legt man durch den Punkt B eine beliebige Achse und eine zu ihr senkrecht stehende Ebene, so ist die Summe aus den Trägheitsmomenten für die Achse und für die Ebene gleich dem polaren Trägheitsmomente für den Punkt B. Auch dieser Satz geht unmittelbar daraus hervor, daß nach dem Pythagoräischen Lehrsatze das Quadrat des Abstandes jeder einzelnen Masse von B gleich der Summe der Quadrate der Abstände von der Achse und der Ebene ist. Nun ist das polare Trägheitsmoment für jeden Punkt B eine eindeutig bestimmte Größe, während die Trägheitsmomente für die verschiedenen Achsen und Ebenen, die man durch den Punkt B legen kann, verschieden voneinander sind. Will man daher die Trägheitsmomente für alle Achsen, die man durch B legen kann, untereinander vergleichen, so genügt es, darauf zu achten, daß jedes von ihnen durch das Trägheitsmoment für die zur Achse senkrechte Ebene zu einer konstanten Summe ergänzt wird. Die vorher besprochenen Beziehungen zwischen den Trägheitsmomenten für alle Ebenen, die man durch einen Punkt A oder B legen kann, reichen daher auch schon aus, um die Beziehungen zwischen den Trägheitsmomenten für alle

Achsen zu erkennen. So sind die zu den Hauptträgheitsebenen senkrecht stehenden Achsen zugleich Hauptträgheitsachsen, d. h. jede Schnittlinie von zwei Hauptträgheitsebenen ist eine Hauptträgheitsachse, nämlich eine Achse, für die das Trägheitsmoment zu einem Maximum oder Minimum wird. Unter allen durch einen Punkt B gehenden Achsen hat jene das größte Trägheitsmoment, die zu der Hauptträgheitsebene senkrecht steht, für die das Trägheitsmoment zum Minimum wird usf. Benutzt man die graphische Darstellung Mohrs für den Spannungszustand zur Darstellung der Trägheits- und Zentrifugalmomente für alle durch denselben Punkt gehenden Ebenen, so kann man darin auch die Trägheitsmomente für alle zu diesen Ebenen senkrecht stehenden Achsen ersichtlich machen, indem man eine Parallele zur τ-Achse zieht, die hier zur Φ-Achse wird, in einem Abstande gleich dem polaren Trägheitsmomente, das gleich der Summe der drei Hauptträgheitsmomente für die Ebenen ist (entsprechend $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ in Abb. 3). Die Abstände der einzelnen Punkte σ, τ von der in diesem Abstande gezogenen Parallelen zur τ-Achse geben die Trägheitsmomente für die zugehörigen Achsen an, falls man, wie es vorher erläutert war, den Spannungszustand zur Abbildung der Vektormomente und ihrer Komponenten verwendet.

Schließlich bemerke ich noch, daß nicht nur allgemein den Vektormomenten und ihren Komponenten für alle durch einen Punkt gehenden Einheitsvektoren $\mathfrak{a}$ ein Spannungszustand $\mathfrak{S}$ mit seinen Komponenten zugeordnet werden kann, sondern daß dies auch noch für die einfacheren Fälle gilt, bei denen einerseits die Massen alle in einer Ebene liegen und andererseits der Spannungszustand in einen ebenen oder zweiachsigen übergeht, indem die dritte Hauptspannung zu Null wird. Auch diese beiden Fälle entsprechen sich und der eine kann zur Abbildung des anderen verwendet werden.

Die Trägheitsmomente für alle Ebenen, die eine ebene Figur senkrecht schneiden, stimmen überein mit den Trägheitsmomenten für die Achsen, die die Spuren der Ebenen in der ebenen Figur bilden. Das geht daraus hervor, daß das Trägheits-

moment der ebenen Figur in bezug auf ihre eigene Ebene gleich Null ist. Die Trägheitsmomente für alle Achsen, die man durch einen Punkt der ebenen Figur in ihrer eigenen Ebene ziehen kann, entsprechen den Normalspannungen in dem ebenen Spannungszustande für die gleich gelegenen Schnittebenen. Ebenso sind die Zentrifugalmomente für zwei untereinander und zur ebenen Figur senkrechte Ebenen den Schubspannungskomponenten für die betreffenden Schnittebenen im ebenen Spannungszustande zugeordnet. Daher kann auch die in Band III, § 8 für den ebenen Spannungszustand gegebene Darstellung durch den Mohrschen Spannungskreis ohne weiteres benutzt werden, um die Trägheitsmomente und Zentrifugalmomente einer ebenen Massenverteilung für alle durch einen gegebenen Punkt gehenden und zur selben Ebene gehörigen Achsen darzustellen.

§ 5. Ersatz eines starren Körpers durch vier oder mehr starr miteinander verbundene materielle Punkte.

Bei den meisten Aufgaben der Dynamik eines starren Körpers kommt es auf dessen besondere Gestalt und Massenverteilung nicht an, sondern nur auf die Gesamtmasse, auf die Lage des Schwerpunktes und auf die Vektormomente und deren Komponenten in bezug auf alle Punkte, Ebenen oder Achsen. Zwei starre Körper, die in diesen übereinstimmen, können sich in der Regel gegenseitig vertreten oder sie sind dynamisch gleichwertig miteinander. Es kann daher zuweilen von Nutzen sein, um die Übersichtlichkeit der Betrachtung zu erhöhen, einen gegebenen starren Körper durch einen anderen von einfacherem Aufbau zu ersetzen, der ihm dynamisch gleichwertig ist.

Das kann noch auf sehr viele Arten geschehen. So kann z. B., wie man leicht einsieht, ein starrer Körper in den genannten Beziehungen stets durch einen von ellipsoidischer Gestalt ersetzt werden. Man braucht nur dafür zu sorgen,

daß die Massen übereinstimmen, daß die Schwerpunkte und die darauf bezogenen Hauptträgheitsachsen zusammenfallen und daß die Hauptträgheitsmomente gleich groß sind, was sich immer erreichen läßt.

Hierauf soll jetzt nicht näher eingegangen, sondern ein anderer Ersatz des starren Körpers durch einzelne starr miteinander verbundene Punkte, wenn auch nur ganz kurz besprochen werden. Zunächst wird man sich fragen, wie viele materielle Punkte dazu nötig sind. Daß drei dazu nicht ausreichen können, ergibt sich sofort daraus, daß das Trägheitsmoment der drei Punkte in bezug auf die durch sie gelegte Ebene zu Null würde, während das Trägheitsmoment einer räumlichen Massenverteilung, wie sie bei dem starren Körper vorauszusetzen ist, für jede Ebene einen von Null verschiedenen positiven Wert haben muß. Zum Ersatze des starren Körpers hat man daher mindestens vier materielle Punkte nötig, die nicht in einer Ebene liegen. Diese Zahl reicht aber auch stets aus und zwar kann man nicht nur auf eine, sondern noch auf unendlich viele Arten vier materielle Punkte angeben, die in starrer Verbindung miteinander einem beliebig gegebenen starren Körper dynamisch gleichwertig sind. Um sich hiervon zu überzeugen, genügt es, die Zahl der Bedingungsgleichungen festzustellen, denen die Unbekannten, nämlich die Koordinaten der materiellen Punkte und ihre Massen genügen müssen, damit der Ersatz des starren Körpers durch die materiellen Punkte hergestellt ist. Die Koordinaten bezieht man dabei am einfachsten auf das durch die Hauptträgheitsachsen des gegebenen starren Körpers gebildete Koordinatensystem. Die Zentrifugalmomente des Systems der materiellen Punkte müssen für die drei Koordinatenebenen zu Null werden und die Trägheitsmomente müssen vorgeschriebene Werte annehmen. Das sind sechs Bedingungsgleichungen; dazu kommen drei Komponentengleichungen, durch die ausgesprochen wird, daß der Schwerpunkt mit dem Koordinatenursprung zusammenfallen muß und eine Gleichung, in der die Summe der Massen gleich der gegebenen Masse gesetzt wird. Diesen zehn Gleichungen stehen

für jeden materiellen Punkt vier Unbekannte gegenüber, nämlich seine Masse und seine drei Koordinaten. Hiernach könnte es scheinen, als wenn man den Gleichungen schon durch geeignete Wahl von drei Punkten genügen könnte; aber man muß bedenken, daß die Gleichungen die Produkte und Quadrate der Unbekannten enthalten und daß es daher sehr fraglich ist, ob sie auch reelle Werte als Lösungen zulassen. In der Tat konnten wir uns vorher schon durch eine andere Überlegung davon überzeugen, daß dies bei drei Punkten nicht möglich ist.

Bei vier Punkten, die nicht in einer Ebene liegen, fällt aber dieser Hinderungsgrund fort und man kann dann in der Tat die zehn Gleichungen auf unendlich viele Arten durch reelle und für die Massen positive Werte der 16 Unbekannten befriedigen. So kann man z. B. verlangen, daß die vier Punkte gleiche Massen haben sollen, so daß auf jeden ein Viertel der Gesamtmasse entfällt. Auch dann bleibt noch der Willkür viel Spielraum. Ein Beispiel für eine der möglichen Lösungen ist in Abb. 7 in axonometrischer Ansicht gezeichnet. Die erste Masse m_1 liegt auf der positiven X-Achse, die drei anderen in einer Ebene, die parallel zur YZ-Ebene ist, so daß zwischen den

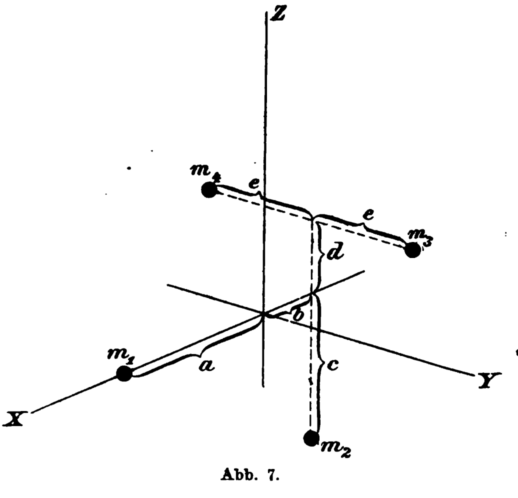


Abb. 7.

Abständen a und b die Beziehung $a = 3b$ erfüllt ist. Die Masse m_2 liegt in dieser Ebene und in der XZ-Ebene im Abstande c von der X-Achse nach abwärts, während die Massen m_3 und m_4 symmetrisch zur XZ-Ebene liegen und ihre Abstände d von der XY-Ebene mit c in der Beziehung $c = 2d$

stehen. Über die Abstände b, d und c kann man dann immer noch so verfügen, daß die Hauptträgheitsmomente die verlangten Werte annehmen. Bezeichnet man die Trägheitshalbmesser mit i_x, i_y, i_z, so ist zu machen

$$a = i_x\sqrt{3}; \quad b = i_x\sqrt{\tfrac{1}{3}}; \quad c = i_z \cdot 2\sqrt{\tfrac{2}{3}}; \quad d = i_z\sqrt{\tfrac{2}{3}}; \quad e = i_y\sqrt{2}.$$

Hat man die Wahl in dieser oder in einer anderen Weise getroffen, so ist zunächst erreicht, daß das System der vier Punkte für jede Achse $\mathfrak{a}$, die durch den als Koordinatenursprung dienenden Schwerpunkt geht, dasselbe Vektormoment hat, wie der gegebene starre Körper. Das trifft aber dann von selbst auch für alle durch jeden beliebigen anderen Punkt gehenden Achsen zu, wie aus Gl. (21) sofort hervorgeht. Auch die Trägheitsmomente für alle beliebigen Ebenen oder Achsen und die Zentrifugalmomente stimmen für beide Massensysteme miteinander überein.

Eine andere Wahl der vier Punkte, die für manche Betrachtungen recht bequem ist, besteht darin, daß man sich zunächst die Gesamtmasse des Körpers im Schwerpunkt vereinigt denkt und hierauf noch auf jeder der drei Hauptträgheitsachsen einen unendlich fernen Punkt mit unendlich kleiner Masse zufügt, so daß die Hauptträgheitsmomente für den Schwerpunkt die verlangten Werte annehmen. Diese Auffassung des starren Körpers ist mit der Deutung eines Kräftepaares als unendlich ferne und unendlich kleine Kraft zu vergleichen und sie gewährt auch in mancher Hinsicht ähnliche Vorteile, wie diese.

Im übrigen ist man aber natürlich nicht daran gebunden, für den Ersatz des starren Körpers gerade nur die kleinstmögliche Zahl von vier Punkten zu verwenden. Sehr anschaulich ist z. B. auch der Ersatz durch sechs starr miteinander verbundene Punkte, von denen je zwei auf einer der Hauptträgheitsachsen symmetrisch zu der darauf senkrecht stehenden Hauptträgheitsebene liegen. Diese Art des Ersatzes ist aber von so einfacher Art, daß sie keine weitere Besprechung erfordert.

Zweiter Abschnitt.

Elastizitätstheorie der Scheiben und der Platten.

§ 6. Vorbemerkungen.

Die allgemeinen Grundlagen der mathematischen Theorie der Elastizität, auf die ich mich im folgenden stützen muß, wurden schon in Band III besprochen. Hier sollen der besseren Übersicht wegen die wichtigsten Formeln, zu denen wir gelangt waren, noch einmal kurz zusammengestellt werden.

Den Ausgangspunkt der Betrachtungen lieferten die Gleichgewichtsbedingungen zwischen den Spannungen und Massenkräften, die an einem unendlich kleinen Parallelepiped angreifen. Bezeichnet man die Komponenten der Massenkraft, bezogen auf die Raumeinheit mit XYZ, so ergeben sich aus dem Gleichgewicht gegen Verschieben in den drei Achsenrichtungen irgend eines rechtwinkligen Koordinatensystems, zu dem die Kanten des Parallelepipeds parallel gelegt sind, die Gleichungen (5) von Band III, nämlich

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \\
\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0 \\
\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z = 0
\end{aligned}\right\} . \qquad (24)$$

Diese drei Gleichungen lassen sich übrigens, wie hier noch beigefügt werden möge*), auch durch eine einzige Vektorgleichung

*) Für eine erste Durchsicht kann man die kleingedruckten Stellen dieses Paragraphen überschlagen.

ersetzen, indem man an Stelle der Spannungskomponenten σ_x usf. den im vorhergehenden Abschnitte eingeführten Vektor $\mathfrak{s}$ zur Kennzeichnung des Spannungszustandes an einem bestimmten Orte benutzt. Das kann noch in verschiedener Weise geschehen; es genügt, wenn wir uns hier auf jene Darstellung beschränken, die mit den einfachsten Mitteln zum Ziele führt.

In § 1 war die Spannung $\mathfrak{s}$ als eine lineare Vektorfunktion des Einheitsvektors $\mathfrak{r}$ erkannt worden, durch dessen Richtung die Stellung des Flächenelementes bestimmt wird, auf das sich $\mathfrak{s}$ bezieht. Ferner wissen wir, daß der Spannungszustand an einem Orte A vollständig bekannt ist, wenn man die Spannungen für drei Schnittebenen, die mit den Koordinatenebenen zusammenfallen mögen, anzugeben vermag. Man kann daher sagen, daß der Spannungszustand eine gerichtete Größe von der nächst höheren Stufe ist, als ein Vektor, insofern nämlich, als er erst durch drei Vektoren, etwa $\mathfrak{s}_i$, $\mathfrak{s}_j$, $\mathfrak{s}_k$ vollständig beschrieben wird, geradeso wie ein Vektor durch Angabe von drei richtungslosen Größen bestimmt ist. Unter $\mathfrak{s}_i$, $\mathfrak{s}_j$, $\mathfrak{s}_k$ sind die Spannungen zu verstehen, die zu den in den Richtungen der Koordinatenachsen gezogenen Einheitsvektoren gehören. Die Spannungen $\mathfrak{s}_i$, $\mathfrak{s}_j$, $\mathfrak{s}_k$ selbst zerfallen wieder in die in den Gleichungen (24) vorkommenden Komponenten nach den Koordinatenachsen, nämlich z. B.

$$\mathfrak{s}_i = \mathfrak{i}\sigma_x + \mathfrak{j}\tau_{xy} + \mathfrak{k}\tau_{xz} \tag{25}$$

wie aus den Bedeutungen von σ_x, τ_{xy} und τ_{xz} ohne weiteres hervorgeht.

Da nun $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ usf., stimmen die Komponenten von $\mathfrak{s}_i$ in dieser Gleichung mit den in der ersten der Gleichungen (24) enthaltenen Spannungskomponenten überein. Wenn aber $\mathfrak{v}$ irgend einen Vektor bedeutet, der einem Punkte des Raumes zugeordnet ist und der sich mit der Lage des Punktes ändert, nämlich

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{i}v_1 + \mathfrak{j}v_2 + \mathfrak{k}v_3$$

so versteht man, wie schon im vierten Bande auseinandergesetzt war, unter Divergenz von $\mathfrak{v}$ den Ausdruck

$$\text{div. } \mathfrak{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}.$$

Diese Größe hat eine von der Wahl des Koordinatensystems unabhängige Bedeutung und läßt sich, wie damals gezeigt war, unter dem Bilde einer Flüssigkeitsströmung, nämlich als deren Quelle anschaulich vorstellen. Mit Hilfe des Begriffes der Divergenz, der in der Vektoranalysis eine sehr wichtige Rolle spielt,

läßt sich, wie aus Gl. (25) hervorgeht, die erste der Gleichungen (24) auch kürzer in der Form

$$\operatorname{div.} \mathfrak{s}_{\mathfrak{i}} + \mathfrak{P}\mathfrak{i} = 0$$

anschreiben. Dabei ist unter $\mathfrak{P}$ die gesamte Massenkraft, unter $\mathfrak{P}\mathfrak{i}$ daher deren vorher mit X bezeichnete Komponente zu verstehen. Ebenso geht die zweite der Gleichungen (24) über in

$$\operatorname{div.} \mathfrak{s}_{\mathfrak{j}} + \mathfrak{P}\mathfrak{j} = 0$$

und entsprechend die dritte. Da die Richtung der Koordinatenachsen völlig willkürlich gewählt war, muß natürlich für jede Richtung dem Sinne nach dieselbe Aussage gelten. Man kann daher die drei Gleichungen (24) auch in einer einzigen Aussage zusammenfassen. Versteht man nämlich jetzt unter $\mathfrak{n}$ irgend einen beliebig gewählten, weiterhin aber als konstant betrachteten Einheitsvektor, so werden durch die für jedes $\mathfrak{n}$ geltende Gleichung

$$\operatorname{div.} \mathfrak{s}_{\mathfrak{n}} + \mathfrak{P}\mathfrak{n} = 0 \tag{26}$$

die Gleichgewichtsbedingungen am Volumenelemente dem vollen Inhalt nach wiedergegeben.

Die Gleichgewichtsbedingungen allein genügen aber nicht, um daraus die Verteilung der Spannungszustände in einem Körper abzuleiten, auf den gegebene Lasten einwirken. Das ist nur dadurch möglich, daß man die Spannungen mit Hilfe des Elastizitätsgesetzes in den Formänderungen ausdrückt. Der Formänderungszustand eines Körpers ist nämlich an sich von einfacherer Art als der Spannungszustand, da zu seiner Beschreibung schon die Angabe eines einzigen Vektors $\mathfrak{v}$ genügt, der eine Funktion des Ortes ist, während zur Beschreibung des Spannungszustandes, wie wir sahen, drei solche Vektoren erforderlich sind. Der Vektor $\mathfrak{v}$, dessen Komponenten wieder, wie schon im dritten Bande, mit ξ, η, ζ bezeichnet werden sollen, gibt die Verschiebung an, die der betreffende Punkt bei der Formänderung relativ zu einem auf dem Körper selbst festgehefteten Koordinatensysteme erfahren hat.

Unter der Voraussetzung eines isotropen Körpers, der dem Hookeschen Elastizitätsgesetze gehorcht, bestehen zwischen den Spannungskomponenten und den Differentialquotienten der Verschiebungskomponenten die in Band III, Gl. (279) und

(283) zusammengestellten Beziehungen, nämlich

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 2\,G\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{e}{m-2}\right) \\ \sigma_y &= 2\,G\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{e}{m-2}\right) \\ \sigma_z &= 2\,G\left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{e}{m-2}\right) \end{aligned}\right\}, \tag{27}$$

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = G\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\}. \tag{28}$$

Darin ist G der Schubelastizitätsmodul, m die Poissonsche Konstante, die gewöhnlich zwischen 3 und 4 liegt und e die kubische Ausdehnung, nämlich

$$e = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \tag{29}$$

wofür man auch

$$e = \operatorname{div.} \mathfrak{v} \tag{30}$$

schreiben kann.

Es mag hier noch angeführt werden, daß man die Beziehungen (27) und (28) ohne Bezugnahme auf ein Koordinatensystem mit den Ausdrucksmitteln der Vektoranalysis auch in eine einzige Gleichung zusammenfassen kann. Versteht man nämlich wieder unter $\mathfrak{n}$ einen beliebig gewählten, aber konstanten Einheitsvektor, so wird

$$\mathfrak{s}_{\mathfrak{n}} = G\left(\nabla(\mathfrak{v}\mathfrak{n}) + (\mathfrak{n}\nabla)\mathfrak{v} + \frac{2}{m-2}\,\mathfrak{n}\operatorname{div.}\mathfrak{v}\right). \tag{31}$$

Die Operationszeichen ∇ und $(\mathfrak{n}\nabla)$ kamen schon im vierten Bande vor und wurden dort erklärt. Man überzeugt sich in der Tat leicht, daß Gl. (31) die Gleichungen (27) und (28) umfaßt, indem man für $\mathfrak{n}$ der Reihe nach $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ setzt und die dadurch erhaltenen Spannungen $\mathfrak{s}_{\mathfrak{i}}, \mathfrak{s}_{\mathfrak{j}}, \mathfrak{s}_{\mathfrak{k}}$ weiter in ihre Komponenten nach den Koordinatenachsen zerlegt.

Setzt man die Werte der Spannungskomponenten aus den Gl. (27) und (28) in die Gl. (24) ein, so erhält man jene Gleichungen, die im dritten Bande als die elastischen Grund-

gleichungen bezeichnet und unter Nummer (285) aufgeführt waren, nämlich

$$\left.\begin{array}{l} \nabla^2\xi + \frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial x} + \frac{X}{G} = 0 \\ \nabla^2\eta + \frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial y} + \frac{Y}{G} = 0 \\ \nabla^2\zeta + \frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial z} + \frac{Z}{G} = 0 \end{array}\right\}. \tag{32}$$

Darin ist unter ∇^2 der Laplacesche Operator zu verstehen, nämlich

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

der, wie alle Ausdrücke der Vektoranalysis ebenfalls eine invariante, nämlich von der besonderen Wahl des Koordinatensystems unabhängige Bedeutung hat.

Auch die drei Grundgleichungen lassen sich, wie schon im dritten Bande bemerkt war, zu einer einzigen Vektorgleichung zusammenfassen, nämlich

$$\nabla^2\mathfrak{v} + \frac{m}{m-2}\nabla \operatorname{div}\mathfrak{v} + \frac{\mathfrak{P}}{G} = 0. \tag{33}$$

Anstatt diese Gleichung durch eine Zusammenfassung der Gleichungen (32) zu erhalten, kann man sie übrigens auch unmittelbar durch Einsetzen von Gl. (31) in Gl. (26) ableiten, ohne den Umweg über die Koordinatendarstellung machen zu müssen, falls man mit den Rechengesetzen der Vektoranalysis ein wenig mehr vertraut ist, als ich es von dem Leser hier voraussetze.

Aus den Grundgleichungen (32) soll noch eine Gleichung abgeleitet werden, die ebenfalls für jeden beliebig belasteten Körper gilt, falls er nur dem Elastizitätsgesetze in der vorausgesetzten einfachsten Form gehorcht. Man differentiiere die erste der Gleichungen (32) nach x, die zweite nach y und die dritte nach z und addiere hierauf; dadurch erhält man zunächst

$$\nabla^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\right) + \frac{m}{m-2}\left(\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{G}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) = 0.$$

Mit Rücksicht auf Gl. (29) und unter Verwendung des Operators ∇^2 im zweiten Gliede der linken Seite läßt sich dies zusammenziehen zu

$$\frac{2m-2}{m-2}\nabla^2 e + \frac{1}{G}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) = 0. \tag{34}$$

Bei den Anwendungen, die man von dieser Gleichung zu machen hat, kann gewöhnlich die Massenkraft $\mathfrak{P}$ mit den Komponenten XYZ entweder ganz vernachlässigt werden oder sie rührt wenigstens nur von dem Eigengewicht, d. h. von dem Kraftfelde der Schwere her, das man bei allen technischen Festigkeitsaufgaben (nämlich mit Ausschluß solcher Betrachtungen, die sich auf die elastischen Eigenschaften des ganzen Erdballes unter dem Einflusse der auf ihn einwirkenden Kräfte beziehen), als homogen ansehen kann, so daß die Differentialquotienten von XYZ nach den Koordinaten xyz sämtlich verschwinden. Alsdann kann Gl. (34) durch die einfachere Gleichung

$$\nabla^2 e = 0 \tag{35}$$

ersetzt werden. — Zu derselben Gleichung gelangt man auch durch Ausführung der Operation div. an der Vektorgleichung (33).

Führt man die Operation ∇^2 an der ersten der Gleichungen (32) nochmals aus, so erhält man mit Rücksicht auf Gl. (35) auch

$$\nabla^2 \cdot \nabla^2 \xi = 0 \tag{35a}$$

und derselben Differentialgleichung vierter Ordnung müssen auch die anderen Verschiebungskomponenten η und ζ genügen.

§ 7. Besondere Gleichungen für den Fall, daß überall σ_z gleich Null gesetzt werden kann.

Bei den scheiben- oder plattenförmigen Körpern, für die man Festigkeitsuntersuchungen anzustellen hat, kann man häufig entweder genau oder doch angenähert annehmen, daß in den beiden ebenen Oberflächen und in allen parallel zu ihnen gelegten Schnittflächen keine Normalspannungen auf-

treten. Läßt man die XY-Ebene des rechtwinkligen Koordinatensystems mit der Mittelebene der Scheibe oder Platte zusammenfallen, so daß die Z-Achse in die Richtung der „Dicke" fällt, so heißt dies, daß man überall $\sigma_z = 0$ setzen kann. Wir wollen jetzt sehen, welche Folgerungen sich aus den allgemeinen Gleichungen für diesen besonderen Fall ableiten lassen. Dabei soll ferner vorausgesetzt werden, daß die Massenkraft $\mathfrak{P}$, wenn sie nicht überhaupt vernachlässigt werden kann, wenigstens von einem homogenen Kraftfelde herrührt, so daß die Gleichung (35) vom Schlusse des vorigen Paragraphen mit übernommen werden kann.

Für $\sigma_z = 0$ folgt aus der dritten der Gleichungen (27)

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{e}{m-2} = 0 \tag{36}$$

und in Verbindung mit Gl. (35) ergibt sich daraus

$$\nabla^2 \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0. \tag{37}$$

Ferner lautete die dritte der Grundgleichungen (32)

$$\nabla^2 \zeta + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial z} + \frac{Z}{G} = 0,$$

wofür jetzt mit Rücksicht auf Gl. (36) auch

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + (1-m) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + \frac{Z}{G} = 0 \tag{38}$$

geschrieben werden kann. Differentiiert man diese Gleichung nach z, beachtet hierbei, daß nach unserer Annahme Z als konstant anzusehen ist und vergleicht das Ergebnis mit Gl. (37), so ergibt sich

$$\frac{\partial^3 \zeta}{\partial z^3} = 0, \tag{39}$$

während Gl. (37) nach Wegfall dieses Gliedes in die einfachere Form

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0 \tag{40}$$

übergeht. Nach Gl. (39) kann man für ζ

$$\zeta = \zeta_0 + q_1 z + q_2 z^2 \tag{41}$$

setzen, wenn man unter $\zeta_0 q_1 q_2$ Funktionen von x und y allein versteht.

Als eine „Scheibe“ soll ein scheiben- oder plattenförmiger Körper insbesondere bezeichnet werden, wenn er nur durch Kräfte in der Plattenebene belastet wird, so daß die Mittelebene bei der Formänderung eben bleibt, während derselbe Körper eine Platte genannt werden soll, wenn er so belastet ist, daß diese Fläche eine Biegung erfährt. Für die Scheibe ist ζ_0 gleich Null zu setzen, während für die Platte, also für den allgemeineren Fall, den wir hier zu behandeln haben, ζ_0 die Ordinate der gekrümmten Fläche angibt, in die die Mittelfläche bei der Biegung übergeht.

Setzt man ζ aus Gl. (41) in Gl. (40) ein und beachtet, daß diese für jeden Wert von z erfüllt sein muß, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q_1}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 q_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial y^2} = 0 \end{aligned}\right\} . \tag{42}$$

Um die Differentialgleichung zu erhalten, der ζ_0 genügen muß, führen wir zunächst die Operation $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ an Gl. (41) aus, wobei sich wegen der Gleichungen (42)

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} \tag{43}$$

ergibt. Gleichung (38) geht daher unter Beachtung von Gl. (41) über in

$$\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} + 2(1-m) q_2 + \frac{Z}{G} = 0.$$

Aus dieser Gleichung ist noch q_2 zu eliminieren, was mit Hilfe von Gl. (42) durch nochmalige Ausführung der Operation $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ gelingt. Wir erhalten dann

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2}\right) = 0. \tag{44}$$

Für die Scheibe hat diese Gleichung keine Bedeutung, da bei ihr ζ_0 gleich Null ist. Dagegen bildet sie die wichtigste Gleichung für die Theorie der Biegungs-elastizität der Platten, freilich nur für den Fall, der hier vorausgesetzt war, daß σ_z überall gleich Null gesetzt werden kann, also mit anderen Worten für den Fall, daß die Formänderung nur durch Kräfte und Kräftepaare hervorgebracht wird, die am Rande der Platte angreifen. Gl. (44) kann auch in der weiter ausgerechneten Form

$$\frac{\partial^4 \zeta_0}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \zeta_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta_0}{\partial y^4} = 0 \qquad (45)$$

angeschrieben werden. Derselben Gleichung genügt übrigens, wie aus Gl. (43) hervorgeht, nicht nur ζ_0, sondern auch ζ selbst.

In einem der folgenden Paragraphen werden wir die Differentialgleichung der Platte nochmals auf Grund einer ganz anderen Betrachtung ableiten, bei der aber eine Reihe von Näherungsannahmen gemacht werden wird, auf deren strenge Erfüllung keineswegs gerechnet werden kann. Die hier gegebene Ableitung, die im übrigen freilich noch eine Reihe von Fragen, die sich auf den Spannungszustand der Platte beziehen, unerledigt läßt, hat dagegen der anderen gegenüber den Vorzug, daß sie nur auf die Voraussetzung $\sigma_z = 0$ gestützt, im übrigen aber streng ist.

§ 8. Besondere Gleichungen für den Fall rein ebener Formänderungen.

In manchen Fällen kann man genau oder wenigstens angenähert voraussetzen, daß die elastische Formänderung eines Körpers in der Art erfolgt, daß eine Schar paralleler Ebenen bei der Formänderung eben bleibt und daß auch in jeder dieser Ebenen die Formänderung in derselben Weise erfolgt, wie in jeder anderen. Das würde z. B. zutreffen bei einer Staumauer, die ein Wasserbecken abschließt und auf eine große Länge hin denselben Querschnitt hat, dabei überall in der-

selben Weise gestützt und belastet ist, falls man sich auf die Untersuchung des mittleren Teiles beschränkt, der von den Enden, an denen abweichende Verhältnisse vorkommen, hinreichend entfernt ist. Auch die Untersuchung des Gleichgewichtszustandes eines Tonnengewölbes nach den Methoden der strengen Elastizitätstheorie kann unter den gleichen Voraussetzungen in derselben Weise durchgeführt werden.

In solchen Fällen genügt es, den Gleichgewichtszustand eines scheibenförmigen Körpers zu betrachten, der zwischen zwei nahe benachbarten Querschnittsebenen enthalten ist. Wir wollen nun sehen, welche Formen die Gleichungen der strengen Elastizitätstheorie unter diesen besonderen Umständen annehmen. Dabei muß freilich von vornherein vor dem Irrtum gewarnt werden, als wenn es sich wirklich um strenge Lösungen der betreffenden Festigkeitsaufgaben handelte. Die Gleichungen, die wir aufstellen wollen, sind streng richtig nur insoweit als die Voraussetzungen, auf denen sie beruhen, auch wirklich erfüllt sind. Bei den vorher genannten Mauerkonstruktionen trifft schon die Voraussetzung, daß das Material dem Hookeschen Elastizitätsgesetze gehorche, keineswegs genau zu. Noch bedenklicher ist in vielen Fällen die andere Annahme, daß der Formänderungs- und Spannungszustand in jedem Querschnitte derselbe sei, wie in jedem anderen. Aber mit solchen Näherungsannahmen muß man sich bei der Lösung praktischer Aufgaben immer behelfen. Bei den Anwendungen wird man sich natürlich der beschränkenden Voraussetzungen, die vielleicht ziemlich weit von der Wirklichkeit abweichen, wohl zu erinnern haben. Wenn dies geschicht, vermag aber die strenge Lösung, die sich auf diese Voraussetzungen stützt, sehr wertvolle Dienste zu leisten.

Läßt man die XY-Ebene mit einer Querschnittsebene zusammenfallen, so wird die besondere Voraussetzung über den Formänderungszustand, die wir hier zugrunde legen, durch die Gleichungen

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\partial e}{\partial z} = 0 \tag{46}$$

ausgesprochen. Die Verschiebung ζ senkrecht zur Querschnittsebene wird in manchen Fällen mit Rücksicht auf die näheren Umstände auch gleich Null gesetzt werden können. Doch ist dies im allgemeinen nicht nötig; jedenfalls muß aber nach Gl. (29) $\frac{\partial \zeta}{\partial z}$ konstant sein, da e nach Voraussetzung ebenfalls unabhängig von z ist. Daher werden wir jetzt im allgemeinen ζ noch als eine lineare Funktion von z anzusehen haben, die von x und y unabhängig ist, wie schon in den Gl. (46) ausgesprochen war.

Aus den Gl. (28) folgt wegen der Gl. (46) ferner

$$\tau_{zx} = 0 \quad \text{und} \quad \tau_{zy} = 0 .$$

Hiernach ist die Querschnittsebene für jeden ihrer Punkte eine Hauptspannungsebene und σ_z eine Hauptspannung. Es könnte sein, daß auch σ_z überall gleich Null zu setzen wäre, wie im vorigen Paragraphen. Im allgemeinen wird dies aber nicht zutreffen und wir wollen, zunächst wenigstens, annehmen, daß σ_z irgend eine Funktion von x und y ist. Daß σ_z und ebenso auch die übrigen Spannungskomponenten σ_x, σ_y und τ_{xy} von z unabhängig sind, folgt aus dem Vergleiche der Gleichungen (27) und (28) mit den hier gemachten und durch die Gleichungen (46) ausgesprochenen Annahmen.

Nach der letzten der Gleichungen (24), die das Gleichgewicht der Spannungen am Parallelepiped aussprachen, muß hier jedenfalls Z gleich Null gesetzt werden. Im übrigen wollen wir annehmen, daß die Massenkraft nur aus dem Eigengewicht des Körpers bestehe und daß die Y-Achse in die Richtung der Schwere gelegt sei, so daß auch $X = 0$ gesetzt werden kann, während Y einen konstanten Wert c annimmt, der das Gewicht der Raumeinheit des Körpers angibt. Die beiden ersten der Gl. (24) schreiben sich dann

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + c = 0 \end{aligned}\right\} . \tag{47}$$

Differentiiert man die erste dieser Gleichungen nach x und die zweite nach y und subtrahiert, so erhält man, da c konstant ist,

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = 0. \tag{48}$$

Hieraus folgt, daß man σ_x und σ_y als Differentialquotienten einer und derselben Funktion F von x und y ansehen kann, nämlich

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}. \tag{49}$$

Setzt man ferner noch

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - cx + a, \tag{50}$$

wobei a irgend eine Konstante bedeutet, so sind durch die Ansätze (49) und (50) die Gleichgewichtsbedingungen (47) in der Tat erfüllt. Die Aufgabe, den Spannungszustand zu finden, ist hiermit vollständig auf die Ermittelung der unbekannten Funktion F zurückgeführt*), die man nach dem ersten Urheber dieser Betrachtungen als die Airysche Spannungsfunktion bezeichnet. Denkt man sich über dem betrachteten Querschnitte eine Fläche konstruiert, deren in der Z-Richtung gehenden Ordinaten den jedem Punkte xy zugeordneten Wert der Spannungsfunktion F darstellen, so ist mit der Gestalt dieser Fläche, die man nach einer von F. Klein eingeführten Bezeichnung die Spannungsfläche nennt, der Spannungszustand überall bekannt.

Die Gleichgewichtsbedingungen liefern uns kein Mittel, um die Funktion F zu bestimmen. Vielmehr würde man bei

*) Die Möglichkeit, alle Spannungskomponenten in einer alle Fälle umfassenden Weise durch eine einzige Funktion F auszudrücken, wird hier dadurch herbeigeführt, daß zwischen den drei Funktionen σ_x, σ_y und τ_{xy} die zwei Gleichungen (47) bestehen müssen. Beim dreiachsigen Spannungszustande ließen sich zwar auch solche Funktionen F angeben, in deren Differentialquotienten sich die sechs Spannungskomponenten ausdrücken ließen; aber man würde damit nicht den allgemeinsten Spannungszustand ausdrücken, sondern einen ganz eng spezialisierten.

jeder beliebigen Wahl von F nach den Gleichungen (49) und (50) zu einem System von Spannungen geführt werden, das an jedem Volumenelemente Gleichgewicht herstellt. Man muß daher wie bei allen Aufgaben der Elastizitätstheorie auch noch auf den Zusammenhang zwischen den Formänderungen und den Spannungen achten.

Anstatt aber, wie es sonst gewöhnlich am zweckmäßigsten ist, von den Gleichungen zwischen den Spannungen zu den Gleichungen zwischen den Verschiebungskomponenten überzugehen, kann man hier auch bei der unmittelbaren Untersuchung des Spannungszustandes stehen bleiben, indem man die Gleichungen (27) und (28) zwischen Spannungs- und Verschiebungskomponenten ausschließlich dazu benutzt, die bisher noch fehlende Gleichung abzuleiten, der die Funktion F genügen muß. Die Dehnung $\frac{\partial \zeta}{\partial z}$ in der Richtung der Z-Achse konnte noch eine Konstante sein, die jetzt mit k bezeichnet werden mag. Dann wird zunächst e nach Gl. (29)

$$e = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + k$$

und nach Gl. (35) erhält man, wenn man dies einsetzt und berücksichtigt, daß ξ und η von z unabhängig sind

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) = 0. \tag{51}$$

Nach den beiden ersten der Gl. (27) wird daher auch

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0. \tag{52}$$

Damit haben wir die Bedingung gewonnen, die zwischen den Spannungskomponenten wegen ihres Zusammenhanges mit den Formänderungen, ganz unabhängig von Gleichgewichtsbetrachtungen bestehen muß und die uns zur Ermittelung der Spannungsfunktion F zu dienen vermag. Setzt man nämlich σ_x und σ_y aus den Gleichungen (49) in Gl. (52) ein, so erhält man

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) = 0,$$

oder bei weiterer Ausrechnung

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0. \tag{53}$$

Es ist von Wichtigkeit darauf hinzuweisen, daß die Gleichung für F vollständig mit der Differentialgleichung (45) für die gebogene Platte übereinstimmt. Dadurch wird es möglich, unter Festhaltung geeigneter Grenzbedingungen am Rande der Platte die Spannungsfläche für eine Scheibe auf experimentellem Wege, nämlich durch die Biegung einer entsprechenden Platte zu ermitteln, wie dies in der Tat von Wieghardt ausgeführt worden ist.

Von Gl. (53) vermag man beliebig viele partikuläre Lösungen anzugeben, von denen jede einem Spannungszustande in einer Scheibe entspricht. Damit dieser auch wirklich zustande komme, muß man sich die Lasten am Umfange der Scheibe so gewählt denken, wie sie sich aus den Gl. (49) und (50) ergeben, wenn man die betreffende Lösung der Gl. (53) einsetzt. Von vornherein gegebenen Grenzbedingungen am Scheibenumfange zu entsprechen, ist natürlich weitaus schwieriger und gewöhnlich nicht möglich. Das hindert aber nicht, daß man doch für eine Reihe von Fällen praktisch brauchbare Aufschlüsse gewinnt, indem man eine größere Zahl von Lösungen der Gl. (53) daraufhin durchprobiert. Auch die allgemeine Lösung von Gl. (53) läßt sich übrigens in verschiedenen Formen darstellen, z. B. in der Form,

$$F = f_1(x+yi) + f_2(x-yi) + (x^2+y^2)\left(f_3(x+yi) + f_4(x-yi)\right)$$

in der die f beliebige Funktionen sind und i die imaginäre Einheit ist. Sowohl der reelle als der imaginäre Teil genügt für sich der Differentialgleichung, wovon man sich durch Ausführung der Differentiationen zu überzeugen vermag. Mit der allgemeinen Lösung ist aber wegen der Schwierigkeit, sie den Grenzbedingungen anzupassen, nicht viel anzufangen.

Ehe ich ein besonderes Beispiel durchrechne, muß ich noch auf die Frage zurückkommen, was bei einer bestimmten Wahl der Spannungsfunktion aus der Hauptspannung σ_z wird.

Aus den beiden ersten der Gleichungen (27) erhält man durch Addition unter Berücksichtigung des hier zutreffenden Wertes k von $\frac{\partial \zeta}{\partial z}$

$$\sigma_x + \sigma_y = 2G\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{2e}{m-2}\right) = 2G\left(e - k + \frac{2e}{m-2}\right),$$

woraus für e folgt

$$e = \frac{m-2}{m}\left(k + \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2G}\right).$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in die dritte der Gleichungen (27) findet man

$$\sigma_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m} + \frac{m+1}{m} 2Gk \qquad (54)$$

oder auch, mit Rücksicht auf die Gleichungen (49)

$$\sigma_z = \frac{1}{m}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) + \frac{m+1}{m} 2Gk. \qquad (55)$$

Hiernach ist σ_z eine Funktion von x und y und im allgemeinen für verschiedene Punkte der Scheibe von verschiedener Größe. Um den Formänderungs- und Spannungszustand, der hier vorausgesetzt war, genau zu verwirklichen, muß man daher an den beiden Endquerschnitten des in der Richtung der Z-Achse weit ausgedehnten Körpers, von dem die Scheibe als ein Längenelement entnommen war, Normalspannungen σ_z als äußere Kräfte anbringen, die sich in der durch Gl. (55) angegebenen Weise über die Querschnittsflächen verteilen.

Nur in dem besonderen Falle, daß $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ und hiermit auch $\sigma_x + \sigma_y$ gleich einer Konstanten ist, kann σ_z durch passende Bestimmung von k überall zu Null gemacht werden. Dann entfällt die Anbringung von Lasten an den Endquerschnitten und die Lösung ist auch für eine beliebige Länge des Körpers in der Richtung der Z-Achse und für alle Scheiben, die man aus ihm entnehmen kann, genau richtig. Freilich handelt es sich dann um einen schon recht eng spezialisierten Fall, der nicht häufig vorkommt und bei beliebiger Gestalt und Belastung der Scheibe am Umfange nicht zu verwerten ist.

Ein Beispiel für diesen besonderen Fall bildet die schon im dritten Bande in § 56 behandelte Beanspruchung von dickwandigen Röhren durch einen inneren oder äußeren Überdruck. In der Tat war damals schon an Stelle der ganzen Röhre nur eine Scheibe behandelt worden und die Aufgabe fällt vollständig in den Kreis der hier angestellten allgemeinen Betrachtungen. Der Vergleich mit den hier gegebenen Ableitungen wird nur dadurch ein wenig erschwert, daß dort Polarkoordinaten zur Darstellung des Spannungszustandes verwendet wurden, während sich die Formeln hier auf rechtwinklige Koordinaten beziehen. Die Spannungsfläche wird natürlich in diesem Falle zu einer Umdrehungsfläche und die Spannungsfunktion F für einen im Abstande r vom Mittelpunkte gelegenen Punkt berechnet sich zu

$$F = p \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{r^2}{2} - b^2 \lg r \right),$$

wie hier nebenbei bemerkt werden möge. Wichtiger ist dagegen die Bemerkung, daß nach den Gl. (219) des dritten Bandes

$$\sigma_r + \sigma_t = p \frac{2a^2}{b^2 - a^2},$$

also gleich einer Konstanten gefunden wird, was mit der vorher geforderten Bedingung, daß $\sigma_x + \sigma_y$ eine Konstante sein sollte, sachlich übereinstimmt. Daraus ergibt sich, daß die für die dickwandigen Röhren gegebene Lösung in der Tat für beliebige Rohrlängen anwendbar bleibt, ohne daß Spannungen σ_z in den Endquerschnitten angebracht werden müßten.

Bei anderen Belastungszuständen freilich, z. B. im Falle einer Staumauer ist nicht zu erwarten, daß $\sigma_x + \sigma_y$ zu einer Konstanten würde. Wenn man dann trotzdem ohne Rücksicht auf die Verhältnisse an den Endquerschnitten das hier besprochene Verfahren zur Untersuchung des Spannungszustandes verwenden will, begeht man von vornherein eine Ungenauigkeit. Diese ist aber in der Regel auch nicht höher einzuschätzen, als jene, die man ohnehin zu begehen gezwungen ist, indem

man das Hookesche Elastizitätsgesetz zugrunde legt. Es ist daher keineswegs ausgeschlossen, daß man auf diesem Wege zu praktisch verwertbaren Ergebnissen gelangt, die der Wahrheit immerhin erheblich näher kommen, als jene, die sich aus der elementaren, nach manchen Richtungen hin recht unzuverlässigen Theorie dieser Staumauern ergeben.

§ 9. Der Spannungszustand von Scheiben.

Im Gegensatze zu den Entwickelungen des vorigen Paragraphen setzen wir hier voraus, daß der scheibenförmige Körper für sich selbständig ist und daher in seiner elastischen Formänderung in der Richtung senkrecht zur Scheibenfläche nicht durch angrenzende Teile behindert oder beeinflußt werden kann. Ferner nehmen wir an, daß alle Lasten, die am Rande der Scheibe als Oberflächenkräfte angreifen, ebenso wie die etwa noch zu berücksichtigenden Massenkräfte als in der zur XY-Ebene gewählten Mittelfläche der Scheibe wirkend angesehen werden können. Die in der Richtung der Z-Achse gemessene Dicke h der Scheibe muß, damit der Körper überhaupt als Scheibe bezeichnet werden kann, als klein gegenüber den Abmessungen des Körpers in der Mittelebene betrachtet werden. In erster Linie wollen wir annehmen, daß die Dicke h konstant ist. Im anderen Falle, wenn nämlich h als eine gegebene Funktion von x und y betrachtet wird, wie es bei manchen Anwendungen der Theorie nötig ist, wird die Aufgabe der Spannungsermittelung bei gegebenen Lasten im allgemeinen erheblich schwieriger.

Auch bei den Scheiben von konstanter Dicke, um die es sich zunächst handelt, unterscheidet sich die Untersuchung von der im vorigen Paragraphen durchgeführten dadurch, daß jetzt keine rein ebene Formänderung vorausgesetzt zu werden braucht. Vielmehr können und werden im allgemeinen die beiden ebenen Begrenzungsflächen der Scheibe eine Krümmung erfahren, dadurch nämlich, daß die in der Richtung der Z-Achse gemessene Querdehnung, die durch die

in der Scheibenebene auftretenden Spannungen hervorgerufen wird, mit dem Orte veränderlich, d. h. eine Funktion von x und y ist. Bei den Betrachtungen des vorigen Paragraphen war die Beschränkung auf ebene Formänderungen wesentlich wegen des Zusammenhanges mit dem übrigen Körper, aus dem die Scheibe entnommen war, während hier diese Rücksicht wegfällt. Andererseits tritt dafür hier die Vereinfachung ein, daß wir σ_z von vornherein gleich Null setzen dürfen.

Von der Mittelebene gilt jedoch auch hier, daß sie bei der Formänderung eben bleiben muß und zwar, weil sie sowohl hinsichtlich der Gestalt, als hinsichtlich der Belastung des Körpers eine Symmetrieebene bildet. Im übrigen kann die Änderung, die die Dicke h bei der Formänderung erfährt, im Verhältnisse zu h selbst als sehr klein oder genau genug auch als unendlich klein angesehen werden. Man darf nur nicht vergessen, daß dieses Verhältnis immerhin von derselben Größenordnung ist, wie die bezogenen Dehnungen in der Mittelebene.

Bei den Scheiben haben wir es, selbst wenn die Dicke h veränderlich sein sollte — sofern nur h überall noch klein bleibt und auch keine plötzlichen Änderungen in der Dicke vorkommen — nur noch mit einem ebenen Spannungszustande zu tun. Man denke sich ein Scheibenelement durch vier zur Scheibenebene senkrechte Ebenen abgegrenzt, die auf der Mittelebene ein Rechteck von den Kantenlängen dx und dy einschließen. Die Dicke h dieses Elements kann nach unseren Voraussetzungen als von derselben Größenordnung wie die Differentialien dx und dy angesehen werden. In einer der senkrecht zur X-Achse stehenden Schnittflächen vom Flächeninhalte hdy werden Spannungen σ_x und τ_{xy} übertragen, die sich über das Flächenelement gleichmäßig verteilen, so daß im ganzen eine Normalkraft von der Größe $\sigma_x h dy$ und eine Schubkraft $\tau_{xy} h dy$ an der Schnittfläche angreift. Setzt man zur Abkürzung

$$s_x = h\sigma_x; \quad s_y = h\sigma_y; \quad t = h\tau_{xy} = h\tau_{yx}, \tag{56}$$

so erhält man als Gleichgewichtsbedingungen gegen Ver-

schieben in den Richtungen der X- und der Y-Achse die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial s_x}{\partial x}+\frac{\partial t}{\partial y}+hX=0\\ \frac{\partial s_y}{\partial y}+\frac{\partial t}{\partial x}+hY=0\end{aligned}\right\}, \tag{57}$$

die auch für Scheiben von veränderlicher Dicke gelten. Kann die Massenkraft vernachlässigt, X und Y daher gleich Null gesetzt werden, so folgt daraus insbesondere noch, ähnlich wie bei der Untersuchung des vorigen Paragraphen, durch Elimination von t

$$\frac{\partial^2 s_x}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 s_y}{\partial y^2}, \tag{58}$$

woraus ferner, wenn man unter F eine „Spannungsfunktion“ versteht,

$$s_x=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2},\quad s_y=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2},\quad t=-\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} \tag{59}$$

folgt. Dagegen ist die Differentialgleichung, der die Funktion F genügen muß, verschieden, je nachdem die Dicke h als konstant oder als veränderlich angesehen wird.

Nach dem Elastizitätsgesetze hat man

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{1}{E}\left(\sigma_x-\frac{1}{m}\sigma_y\right);\quad \frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{1}{E}\left(\sigma_y-\frac{1}{m}\sigma_x\right);\quad \frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{1}{G}\cdot\tau_{xy}.$$

Differentiiert man die erste dieser Gleichungen zweimal nach y, die zweite zweimal nach x und die dritte nach x und nach y, worauf man die beiden ersten von der dritten subtrahiert, so erhält man die Differentialgleichung, die zwischen den Spannungskomponenten wegen des Zusammenhanges der Spannungen mit den Formänderungen erfüllt sein muß, nämlich

$$\frac{1}{G}\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x\partial y}=\frac{1}{E}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sigma_x-\frac{1}{m}\sigma_y\right)+\frac{1}{E}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sigma_y-\frac{1}{m}\sigma_x\right). \tag{60}$$

Drückt man in dieser Gleichung die Spannungskomponenten in der Spannungsfunktion F aus, so erhält man die Differentialgleichung, der F genügen muß. Wenn keine Massenkraft wirkt, erhält man durch Einsetzen aus den Gleichungen (59) und (56)

$$\frac{E}{G}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{1}{h}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{h}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}-\frac{1}{mh}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{h}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-\frac{1}{mh}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)=0. \quad (61)$$

Für Scheiben von veränderlicher Dicke, bei denen h irgend eine gegebene Funktion von x und y ist, hat man es daher mit einer sehr verwickelten Differentialgleichung für die Spannungsfunktion zu tun. Wenn dagegen h konstant ist, fällt es ganz aus der Gleichung fort und mit Rücksicht auf die Beziehung

$$G=\frac{mE}{2(m+1)}$$

vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}=0.$$

Diese stimmt genau mit der Gleichung (53) für die Spannungsfunktion im vorigen Paragraphen überein. Jede Lösung, die unter den im vorigen Paragraphen angenommenen Voraussetzungen gefunden wird, läßt sich daher ohne weiteres auch auf die hier behandelten Scheiben übertragen. Der ganze Unterschied zwischen beiden Fällen besteht in der Tat nur darin, daß dort Spannungen σ_z auftreten mußten, die die rein ebene Formänderung aufrecht erhielten, während hier einer an den verschiedenen Stellen verschieden großen Dehnung in der Richtung der Z-Achse nichts im Wege steht, so daß die Normalspannungen σ_z entbehrlich werden.

§ 10. Behandlung eines Beispiels.

Ein Balken sei, wie in Abb. 8 angegeben, einer gleichmäßig über die ganze Länge verteilten Belastung ausgesetzt und an beiden Enden unterstützt. Da die senkrecht zur Zeichenebene gemessene Dicke des Balkens klein ist gegen die Spannweite, genügt es, sich den Balken als eine dünne Scheibe vorzustellen. Das Eigengewicht des Balkens kann gegenüber der Last die es trägt, vernachlässigt oder auch in jene mit

eingerechnet werden. Wir legen eine X-Achse in horizontaler Richtung und in halber Höhe des Balkens, während die Y-Achse durch die Mitte der Spannweite geht. (Siehe Abb. 8.)

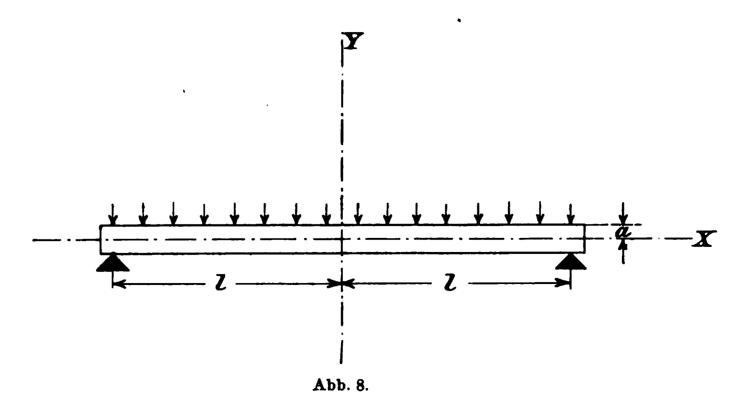


Abb. 8.

Als Grenzbedingungen sind hier vorgeschrieben, zunächst daß für $y = \pm a$ überall τ_{xy} zu Null werden muß, ferner daß σ_y für $y = -a$ zu Null und für $y = +a$ zu $-p$ werden muß, wenn man unter p den von der gegebenen Belastung unmittelbar hervorgebrachten Druck auf die Oberseite des Balkens versteht. An den beiden Enden des Balkens freilich können wir die Grenzbedingungen nicht streng erfüllen, schon deshalb weil nicht genau bekannt ist, wie sich der Auflagerdruck an den Unterstützungsstellen verteilt. Infolgedessen können wir auch nicht erwarten, daß unsere Lösung noch in der Nähe der Auflager zutreffe. Für die weiter vom Auflager entfernten Stellen macht es dagegen nichts aus, wie sich der Auflagerdruck im einzelnen überträgt; es genügt daher, wenn wir nur dafür sorgen, daß am Balkenende Kräfte in beliebiger Verteilung übertragen werden, die einer durch den Stützpunkt gehenden Einzelkraft von der Größe der halben Last des Balkens statisch gleichwertig sind.

Die Spannungsfunktion F, die sowohl der Differentialgleichung (53) als auch den angegebenen Grenzbedingungen genügt, lautet

$$F = \frac{p}{4a^3}\left\{\frac{x^2}{2}\left(y^3 - 3a^2y - 2a^3\right) - \frac{y^3}{10}\left(y^2 + 5l^2 - 2a^2\right)\right\}. \quad (62)$$

Um sich davon zu überzeugen, bilde man zunächst die Differentialquotienten von F, nämlich

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{p}{4a^3}\left(3x^2 y - 2y^3 - 3yl^2 + \frac{6}{5}a^2 y\right) \tag{63}$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{p}{4a^3}\left(y^3 - 3a^2 y - 2a^3\right) \tag{64}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -\frac{p}{4a^3}x(3y^2 - 3a^2) \tag{65}$$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} = 0; \quad \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = -3\frac{p}{a^3}y; \quad \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} = +\frac{3}{2}\frac{p}{a^3}y$$

Hiernach ist zunächst die Differentialgleichung für F, nämlich

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0$$

erfüllt. Es handelt sich also nur noch um den Nachweis, daß die Grenzbedingungen befriedigt werden. Für $y = \pm a$ wird aber, wie verlangt, τ_{xy} zu Null, ebenso σ_y für $y = -a$, während σ_y für $y = +a$ den verlangten Wert $-p$ annimmt. An den beiden Endquerschnitten des Balkens für $x = \pm l$ wird

$$\sigma_x = \frac{p}{4a^3}\left(-2y^3 + \frac{6}{5}a^2 y\right).$$

Das ist zwar nicht gleich Null; aber diese Normalspannungen in den Endquerschnitten führen, was allein verlangt werden sollte, weder zu einer Resultierenden, noch zu einem resultierenden Momente, sondern sie bilden ein über den Endquerschnitt verteiltes Gleichgewichtssystem von Lasten, das nur in der Nähe des Auflagers, aber nicht in den weiter davon entfernten Teilen des Balkens Spannungen von merklicher Größe zur Folge haben kann. Bildet man nämlich für diese Spannungen in den Endquerschnitten

$$\int_{-a}^{+a} \sigma_x dy \quad \text{und} \quad \int_{-a}^{+a} \sigma_x y dy,$$

so findet man, wie die einfache Ausrechnung lehrt, daß beide Summen zu Null werden, womit die vorhergehende Behauptung bestätigt wird.

Die Schubspannungen in den Endquerschnitten liefern dagegen eine Resultierende, die sich (unter h die Balkendicke verstanden) nach Gl. (65) zu

$$h \int_{-a}^{+a} \tau_{xy} dy = -\frac{plh}{4a^3} \int_{-a}^{+a} (3y^2 - 3a^2) dy = hpl$$

berechnet. Das ist aber, wie es sein muß, die Hälfte der ganzen Last, die der Balken aufzunehmen hat.

Hiermit ist der Beweis für die Richtigkeit der in Gl. (62) gegebenen Lösung unter den näher bezeichneten Voraussetzungen geliefert. Wegen der Abweichungen der Grenzbedingungen an den Enden von den dort tatsächlich bestehenden Verhältnissen darf man die aufgestellten Formeln freilich nur für solche Stellen des Balkens benutzen, die von den Endquerschnitten genügend weit entfernt sind. Man darf annehmen, daß bei einem Abstande von den Enden, der gleich dem Doppelten der Balkenhöhe (also gleich $4a$) ist, keine merkliche Abweichung zwischen den Angaben der Formeln und dem tatsächlichen Spannungszustande mehr zu erwarten ist. Um dies experimentell nachzuweisen, hat Herr Professor Mesnager in Paris Glasscheiben von entsprechender Gestalt und Belastung einer optischen Untersuchung des Spannungszustandes unterzogen, wobei er von der Eigenschaft des Glases Gebrauch machte, durch den Spannungszustand doppelbrechend zu werden. Die Beobachtung bestätigte die theoretisch gezogenen Schlüsse für die von den Endquerschnitten weit genug abliegenden Stellen und zeigte, daß die Formeln bei einem Abstande, der das Doppelte der Balkenhöhe ausmacht, schon als hinlänglich genau richtig betrachtet werden können.

Die Verteilung der Normalspannungen σ_x über den Querschnitt des Balkens befolgt bei der hier angenommenen Belastungsweise, wie aus Gl. (63) hervorgeht, nicht das einfache Gradliniengesetz, das man bei technischen Berechnungen stets zu Grunde legt, wie nun auch die Belastung des Balkens zusammengesetzt sein möge. Man sieht aber auch, daß die Ab-

5*

weichung vom Gradliniengesetze, d. h. von der Proportionalität mit y nicht sehr erheblich ist. Im mittleren Querschnitte des Balkens, in dem die größten Spannungen σ_x auftreten, hat man

$$\sigma_x = \frac{p}{4a^3}\left(-2y^2 - 3l^2 + \frac{6}{5}a^2\right)y.$$

In der Klammer ist aber das Glied $3l^2$ weitaus das größte. Selbst wenn l nur gleich $5a$ angenommen wird, überwiegt das Glied $3l^2$ weitaus die beiden übrigen, da y nicht größer als a werden kann. Von $y = 0$ bis zu $y = a$ wächst der Wert in der Klammer dem Absolutbetrage nach für $l = 5a$ nur um 2,7 Prozent an. Diese Veränderlichkeit ist so geringfügig, daß man mit genügender Annäherung den Klammerwert als konstant betrachten, d. h. die Verteilung der Normalspannungen nach dem Gradliniengesetze annehmen kann.

Immerhin lehrt uns diese Betrachtung, daß die Proportionalität der Spannungen mit den Abständen von der Nullinie bei beliebiger Belastung des Balkens nicht genau erfüllt ist, und daß daher bei Fällen, die von den gewöhnlich vorkommenden hinsichtlich der Art der Belastung, der Gestalt des Balkens und der Art der Stützung erheblich abweichen auch entsprechend große Abweichungen vom Gradliniengesetze der Spannungsverteilung möglich sind. So ist die gewöhnliche Berechnung der Stau- und Stützmauern, die auf der Annahme des Gradliniengesetzes für die horizontalen Fugen beruht, durchaus willkürlich und wahrscheinlich sehr ungenau und unzuverlässig. Eine bessere Lösung fehlt zwar bis jetzt noch; doch läßt sich annehmen, daß es keine allzugroßen Schwierigkeiten verursachen kann, eine solche nach den Lehren der vorhergehenden Paragraphen aufzusuchen. Auch experimentell ließe sich nach der optischen Methode wohl eine praktisch brauchbare Lösung finden, die mehr Zutrauen verdient, als die jetzt angewendete. Nachdem die Aufmerksamkeit weiterer Kreise, namentlich in England im Laufe des letzten Jahres auf die wichtige Frage der genaueren Berechnung der

Staumauern gelenkt worden ist, darf man wohl annehmen, daß diese Frage in den nächsten Jahren in befriedigender Weise gelöst werden wird.

Anmerkung. Die in diesem Paragraphen als Beispiel vorgeführte Lösung hat Professor Mesnager im Jahre 1901 gegeben, wenn auch ohne Benutzung des Begriffes der Spannungsfunktion. Mit Benutzung der Spannungsfunktion kommt die Lösung neben einer größeren Zahl anderer in der beachtenswerten Göttinger Dissertation von A. Timpe, 1905 vor. In der Timpeschen Abhandlung ist übrigens gerade an dieser Stelle ein unbedeutender Fehler zu verbessern, wie aus dem Vergleiche mit dem in Gl. (62) richtig angegebenen Werte der Spannungsfunktion hervorgeht.

§ 11. Gleichungen für die Spannungsfunktion in Polar-Koordinaten.

In vielen Fällen ist es zweckmäßiger, mit Polarkoordinaten r, φ zu rechnen und daher sowohl die Spannungsfunktion als die Spannungskomponenten in diesen Polarkoordinaten auszudrücken. Es soll daher hier noch gezeigt werden, wie man die Umrechnung von den rechtwinkligen Koordinaten auf die Polarkoordinaten vornehmen kann und welche Form die wichtigsten Gleichungen der vorigen Paragraphen in dieser Ausdrucksweise annehmen.

Zur Kennzeichnung des Spannungszustandes an einer Stelle r, φ der Scheibe benutzen wir die an dem Elemente in Abb. 9 angreifenden Normalspannungen σ_r und σ_t und die

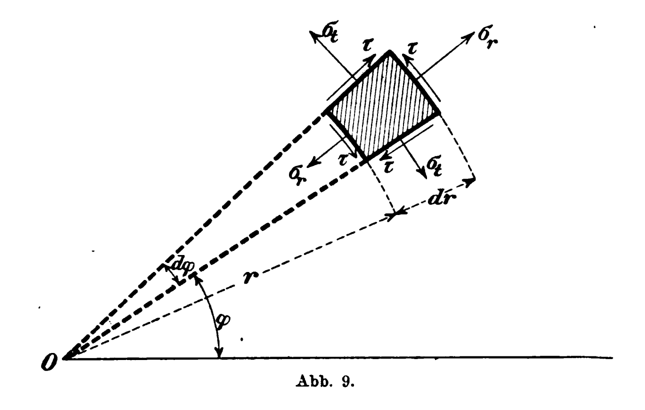


Abb. 9.

Schubspannung τ_{rt} oder kürzer τ. Die Produkte dieser Spannungskomponenten mit der Scheibendicke h bezeichnen wir, ähnlich wie im § 9 mit s_r, s_t und t. Es fragt sich zunächst, wie sich diese Komponenten in der Spannungsfunktion F ausdrücken lassen. Hierzu beachte man, daß bei der früheren Darstellungsweise die Koordinatenachsen XY beliebig gerichtet sein durften. Denken wir uns daher jetzt außerdem noch eine X-Achse in der Richtung φ und eine Y-Achse senkrecht dazu gelegt, so stimmen die Spannungskomponenten s_r, s_t und t genau überein mit jenen, die wir früher unter der Bezeichnung s_x, s_y und t verwendeten. Entsprechend den Gleichungen (59) können wir daher in leicht verständlicher Bezeichnung vorläufig setzen

$$s_r = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \quad s_t = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad t = -\frac{\partial^2 F}{\partial r \, \partial t}.$$

Nun ist aber F jetzt als eine Funktion von r und φ zu betrachten. Eine partielle Differentiation nach r in den vorstehenden Gleichungen hat den Sinn, daß an der Richtung t, d. h. am Winkel φ nichts geändert werden soll. Daher kann der Ausdruck für s_t unmittelbar so übernommen werden, wie er schon angegeben wurde. Dagegen muß noch klar gestellt werden, was aus den Differentiationen nach t wird. Nach dem Sinne, in dem diese Bezeichnung gebraucht wurde, ist unter $\partial F/\partial t \cdot dt$ die Änderung zu verstehen, die F erfährt, wenn man in der tangentialen Richtung um ein Längenelement dt weiter geht. Hierbei ändert sich der Winkel φ um $d\varphi$, so daß $dt = r d\varphi$ ist und dieselbe Änderung von F kann auch durch $\frac{\partial F}{\partial \varphi} \cdot d\varphi$ ausgedrückt werden. Daher hat man

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi}.$$

Um die zweiten Differentialquotienten ineinander ausdrücken zu können, müssen wir dagegen die Änderung, die F bei einem Fortschreiten um dt in tangentialer Richtung erfährt, bis auf Größen, die von der zweiten Ordnung unendlich klein sind, berechnen. Dann ändert sich F nach dem Taylorschen Satze um

$$\frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{1}{2} dt^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}.$$

Um dieselbe Änderung in den Differentialquotienten nach r und φ darzustellen, haben wir zu beachten, daß einem Fortschreiten in tangentialer Richtung um dt nicht nur eine Winkeländerung $d\varphi$ sondern zugleich auch eine Änderung von r entspricht, die bis auf Größen zweiter Ordnung genau

$$d\varphi = \frac{1}{r}\,dt \quad \text{und} \quad dr = \frac{1}{2r}\,dt^2$$

sind (vgl. Abb. 10). Hiernach stellt sich die vorher besprochene Änderung von F auf

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi}\frac{1}{r}\,dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}\left(\frac{1}{r}\,dt\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial r}\cdot\frac{1}{2r}\,dt^2.$$

Der Vergleich beider Ausdrücke führt, soweit es sich um die Glieder von der ersten Ordnung handelt, wieder zu der vorher schon festgestellten Beziehung zwischen den ersten Differentialquotienten. Aus dem Vergleiche der von der zweiten Ordnung kleinen Glieder folgt dagegen

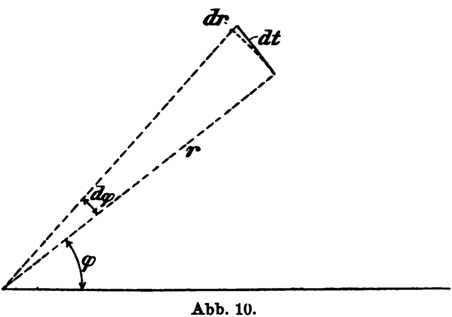


Abb. 10.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}.$$

Für den Differentialquotienten $\partial^2 F/\partial r\,\partial t$ läßt sich die Betrachtung ebenso durchführen und im ganzen erhält man für die Spannungskomponenten

$$s_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}, \quad s_t = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad t = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right) \qquad (66)$$

Wie wir nun auch F als Funktion von r und φ wählen mögen, jedenfalls gelangen wir nach diesen Formeln zu einem Spannungszustande, der die Gleichgewichtsbedingungen an jedem Scheibenelement befriedigt, vorausgesetzt, daß die Massenkraft vernachlässigt werden darf. Wegen des Zusammenhanges

zwischen dem Spannungszustande und der Formänderung muß aber, wie wir früher fanden, F einer partiellen Differentialgleichung vierter Ordnung genügen, die wir jetzt ebenfalls in Polarkoordinaten umzuschreiben haben. Aus den vorhergehenden Betrachtungen ergibt sich schon, daß der Differentialoperator

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

in Polarkoordinaten ausgedrückt wird durch

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

und für Scheiben von überall gleicher Dicke lautet daher die Differentialgleichung, der F genügen muß

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\right) = 0\cdot \qquad (67)$$

Diese Gleichung ist erheblich verwickelter als die ihr bei der Benutzung rechtwinkliger Koordinaten entsprechende, so daß im allgemeinen Falle die frühere Darstellung den Vorzug verdient. Anders wird es aber, wenn durch Symmetrieeigenschaften, wie sie bei Aufgaben der Praxis öfters vorkommen, Vereinfachungen herbeigeführt werden. Der einfachste Fall, der in dieser Hinsicht möglich ist, besteht darin, daß die Spannungsfläche zu einer Umdrehungsfläche, d. h. F unabhängig von φ wird. In diesem Falle vereinfacht sich Gl. (67) zu

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dF}{dr}\right) = 0\cdot \qquad (68)$$

Die allgemeine Lösung dieser totalen Differentialgleichung kann leicht ermittelt werden; sie lautet, wovon man sich durch Einsetzen auch nachträglich sofort überzeugen kann,

$$F = c_0 + c_1 \lg r + c_2 r^2 + c_3 r^2 \lg r, \qquad (69)$$

worin die c die vier willkürlichen Integrationskonstanten sind. Dieser Spannungsfunktion entsprechen nach den Gleichungen (66) die Spannungskomponenten

$$\left.\begin{aligned} s_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} = 2c_2 + c_3 + \frac{c_1}{r^2} + 2c_3 \lg r \\ s_t &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = 2c_2 + 3c_3 - \frac{c_1}{r^2} + 2c_3 \lg r \\ t &= 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (70)$$

Wegen $t = 0$ sind s_r und s_t oder die aus ihnen durch Division mit h hervorgehenden Spannungskomponenten σ_r und σ_t überall Hauptspannungen, was ja auch bei einer ringsum symmetrischen Spannungsfunktion von vornherein zu erwarten war. — Die gefundene Lösung umfaßt nun noch verschiedene Fälle, die in der Folge einzeln besprochen werden sollen.

§ 12. Die reine Biegung des krummen Stabes.

Ein Stab von starker Krümmung sei in der Richtung senkrecht zur Krümmungsebene ziemlich dünn, so daß er genau genug als eine Scheibe und zwar von konstanter Dicke aufgefaßt werden kann. An den beiden Endquerschnitten sei er, wie in Abbildung 11 angedeutet, durch Momente M beansprucht, während sonst keine äußeren Kräfte auf ihn einwirken. Der Spannungszustand, der hierdurch in der Scheibe hervorgerufen wird, ist in dem durch die Gleichungen (69) und (70) beschriebenen mit enthalten. Das geht nämlich daraus hervor, daß man diese Lösung den im vorliegenden Falle gegebenen Grenzbedingungen vollständig anzupassen vermag.

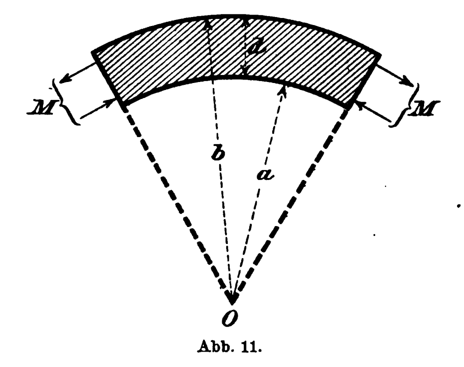


Abb. 11.

Zunächst ist nämlich nach der dritten der Gleichungen (70) die Schubspannung an allen Umrißlinien des Ringsektors gleich Null. Damit auch s_r an den beiden kreisförmigen Begrenzungslinien, also für $r = a$ und für $r = b$ verschwindet,

müssen die Konstanten c den Bedingungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} 2c_2 + c_3 + \frac{c_1}{a^2} + 2c_3 \lg a = 0 \\ 2c_2 + c_3 + \frac{c_1}{b^2} + 2c_3 \lg b = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (71)$$

genügen. Die Konstanten c sind damit bis auf eine, über die noch weiter verfügt werden kann, bestimmt.

An den radialen Begrenzungsflächen sind äußere Kräfte anzubringen, die dem für s_t aufgestellten Ausdrucke entsprechen. Man überzeugt sich leicht, daß sich diese Kräfte für einen Endquerschnitt zu einem Kräftepaar zusammenfassen lassen. Bildet man nämlich

$$\int_a^b s_t dr = \int_a^b \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} dr = \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)_{r=b} - \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)_{r=a},$$

so erkennt man, daß mit der Erfüllung der Gleichungen (71) von selbst auch

$$\int_a^b s_t dr = 0$$

wird, womit die Behauptung bewiesen ist. Damit das Kräftepaar den verlangten Wert M annimmt, brauchen wir die Konstanten c nur noch der weiteren Bedingungsgleichung zu unterwerfen

$$M = \int_a^b s_t r\, dr.$$

Durch Einsetzen des Wertes von s_t aus (70) und Ausführung der Integration geht dies über in

$$\begin{aligned} M = (c_2 + c_3)(b^2 - a^2) - c_1 (\lg b - \lg a) \\ + c_3 (b^2 \lg b - a^2 \lg a). \end{aligned} \qquad (72)$$

Löst man die Gleichungen (71) und (72) nach den Konstanten c auf, so erhält man

$$\left.\begin{aligned}
c_1 &= M\frac{4a^2b^2\lg\frac{b}{a}}{(b^2-a^2)^2-4a^2b^2\left(\lg\frac{b}{a}\right)^2}\\
c_2 &= -M\frac{b^2-a^2+2(b^2\lg b-a^2\lg a)}{(b^2-a^2)^2-4a^2b^2\left(\lg\frac{b}{a}\right)^2}\\
c_3 &= M\frac{2(b^2-a^2)}{(b^2-a^2)^2-4a^2b^2\left(\lg\frac{b}{a}\right)^2}
\end{aligned}\right\}. \tag{73}$$

Die Spannungskomponenten s_r und s_t endlich findet man nach den Gleichungen (70) durch Einsetzen dieser Werte zu

$$\left.\begin{aligned}
s_r &= \frac{4M}{N}\left\{-a^2\lg\frac{r}{a}-b^2\lg\frac{b}{r}+\frac{a^2b^2}{r^2}\lg\frac{b}{a}\right\}\\
s_t &= \frac{4M}{N}\left\{b^2-a^2-a^2\lg\frac{r}{a}-b^2\lg\frac{b}{r}-\frac{a^2b^2}{r^2}\lg\frac{b}{a}\right\}
\end{aligned}\right\}, \tag{74}$$

wenn mit N zur Abkürzung der schon bei den vorhergehenden Gleichungen vorkommende gemeinschaftliche Nenner

$$N=(b^2-a^2)^2-4a^2b^2\left(\lg\frac{b}{a}\right)^2$$

bezeichnet wird. Für die beiden Kantenspannungen, nämlich für die Spannungen s_t an den Stellen $r=a$ und $r=b$ erhält man

$$\left.\begin{aligned}
(s_t)_{r=a} &= \frac{4M}{N}\left(b^2-a^2-2b^2\lg\frac{b}{a}\right)\\
(s_t)_{r=b} &= \frac{4M}{N}\left(b^2-a^2-2a^2\lg\frac{b}{a}\right)
\end{aligned}\right\}. \tag{75}$$

Für den Fall, daß sich die beiden Radien nicht viel voneinander unterscheiden, etwa um einen Betrag d, der klein ist gegen a, kann man den Logarithmus auch noch in eine schnell konvergierende Reihe entwickeln, nämlich

$$\lg\frac{b}{a}=\lg\left(1+\frac{d}{a}\right)=\frac{d}{a}-\frac{1}{2}\left(\frac{d}{a}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{d}{a}\right)^3-\cdots$$

Für die Kantenspannungen erhält man dann unter Vernachlässigung der Glieder von der Ordnung $\frac{d^2}{a^2}$ in der Klammer

$$\left.\begin{aligned}(s_t)_{r=a} &= -\frac{8M}{N}d^2\left(1+\frac{1}{3}\frac{d}{a}\right)\\ (s_t)_{r=b} &= \frac{8M}{N}d^2\left(1-\frac{1}{3}\frac{d}{a}\right)\end{aligned}\right\}. \tag{76}$$

Zugleich kann aber N bis auf Glieder von derselben Ordnung genau entwickelt werden zu

$$N = d^4\left(\frac{4}{3} - 2\frac{d}{a}\right),$$

so daß man als Näherungswerte für die Kantenspannungen

$$\left.\begin{aligned}(s_t)_{r=a} &= -\frac{M}{d^2}\cdot\frac{8\left(1+\frac{1}{3}\frac{d}{a}\right)}{\frac{4}{3}-2\frac{d}{a}}\\ (s_t)_{r=b} &= \frac{M}{d^2}\cdot\frac{8\left(1-\frac{1}{3}\frac{d}{a}\right)}{\frac{4}{3}-2\frac{d}{a}}\end{aligned}\right\} \tag{77}$$

erhält. Vernachlässigt man hierin auch noch die mit d/a behafteten Glieder, so kommt man auf die gewöhnliche Formel für die Biegung eines geraden Stabes von rechteckigem Querschnitt.

In der zweiten Auflage des dritten Bandes hatte ich in § 70a unter dem Titel „Der Spannungszustand eines gekrümmten Stabes nach der strengen Elastizitätslehre“ einen kürzeren Abriß der Untersuchung gegeben, die Herr Prandtl über die reine Biegung des krummen Stabes von rechteckigem Querschnitte angestellt hatte. Jene Betrachtung beruhte auf der Aufstellung der Differentialgleichungen für die Formänderungen, während hier zur Ableitung desselben Endresultates die Methode der Spannungsfunktion verwendet wurde.

Die Lösung gilt übrigens streng nur innerhalb eines sehr engen Bereiches. Zunächst nämlich ist die Summe $s_r + s_t$, wie man aus den Gleichungen (74) erkennt, keine Konstante, sondern veränderlich mit r. In diesem Falle ist also, wie in § 8 in den auf Gl. (55) folgenden Bemerkungen auseinandergesetzt wurde, die Lösung nicht genau auf einen Stab von beliebiger

Dicke in der Richtung senkrecht zur Scheibenebene anwendbar, sondern sie kann dafür nur als näherungsweise gültig betrachtet werden.

Ferner ist auch die Bedingung sehr wesentlich, daß der Querschnitt rechteckig, also die Dicke h der Scheibe konstant sein soll. Denn nur unter dieser Voraussetzung bildet die Spannungsfunktion eine Lösung der einfachen Differentialgleichung, aus der wir sie abgeleitet haben, während sonst auf die verwickeltere Differentialgleichung (61), die sich auch auf Polarkoordinaten umschreiben läßt, zurückgegriffen werden müßte.

Endlich kommt bei einem stark gekrümmten Stabe in Betracht, daß seine Längsausdehnung nicht sehr viel größer sein kann, als die Breite d, weil dies eben gerade dem Begriffe eines stark gekrümmten Stabes widersprechen würde. Daher liegen alle Teile des Stabes verhältnismäßig nahe bei den Endquerschnitten. Unter diesen Umständen ist es aber keineswegs gleichgültig, wie sich das Moment M im einzelnen über den Endquerschnitt verteilt. Das heißt, man muß, wenn die Lösung als genau für die übrigen Querschnitte betrachtet werden soll, auch schon im Endquerschnitte jene Verteilung der äußeren Kraft verlangen, die aus der Formel für s_t' hervorgegangen ist.

Daher kann aus der hier wiedergegebenen Theorie keineswegs eine Stütze für die heute bei technischen Festigkeitsberechnungen so häufig zu Grunde gelegte Annahme hergeleitet werden, daß die Querschnitte bei der reinen Biegung krummer Stäbe unter allen Umständen eben bleiben. Für solche Fälle, wie sie z. B. bei der Berechnung eines Hakens vorliegen, vermag vielmehr die strenge Theorie bis heute überhaupt keine brauchbare Unterlage zu schaffen. Man kann im Gegenteile nur sagen, daß die Annahme, die Querschnitte blieben eben, fast genau so willkürlich und gewagt ist, wie die andere Annahme, daß sich die Spannungen nach einem Gradliniengesetze über den Querschnitt verteilten. Die Ergebnisse

des Versuchs bilden in solchen Fällen die einzige wirklich zuverlässige Erkenntnisquelle.

Dagegen ist richtig, daß bei der reinen Biegung einer Scheibe von der Gestalt eines Ringsektors (Abb. 11) die Querschnitte eben bleiben. Um dies zu beweisen, betrachte man die Gestaltänderung des in Abb. 12 gezeichneten Scheibenelementes. Da σ_t und σ_r Hauptspannungen waren, ändern sich die rechten Winkel an den vier Ecken des Elements nicht. Dagegen ändern sich sowohl die Krümmungshalbmesser der Bogenelemente AB und CD, als auch der Winkel, den die Verbindungslinien AC und BD vor und nach der Formänderung miteinander bilden. Unser nächstes Ziel soll darin bestehen, den Winkel $d\psi$ zu berechnen, in den der Zentriwinkel $d\varphi$ durch die Formänderung übergeht.

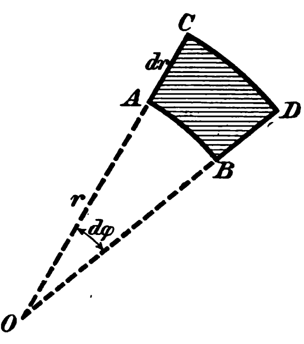


Abb. 12.

Die bezogenen Dehnungen ε_r und ε_t in radialer und tangentialer Richtung gehen aus den Hauptspannungen σ_r und σ_t nach dem Elastizitätsgesetze hervor zu

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left(\sigma_r - \frac{1}{m}\sigma_t\right); \quad \varepsilon_t = \frac{1}{E}\left(\sigma_t - \frac{1}{m}\sigma_r\right).$$

Die Strecke AC, die ursprünglich gleich dr war, wird nachher gleich $dr\,(1 + \varepsilon_r)$ und die Strecke AB, die gleich $r\,d\varphi$ war, wird zu $r\,d\varphi(1 + \varepsilon_t)$. Der Unterschied zwischen den Längen CD und AB wird daher nach der Formänderung zu

$$\frac{d}{dr}\left\{r\,d\varphi(1 + \varepsilon_t)\right\} \cdot dr.$$

Andererseits kann dieser Unterschied auch gleich dem neuen Werte des Zentriwinkels $d\psi$ mal der neuen Länge der Strecke AC gesetzt werden. Dadurch erhalten wir zur Berechnung von $d\psi$ die Gleichung

$$dr(1 + \varepsilon_r)d\psi = d\varphi\frac{d}{dr}(r + r\varepsilon_t)dr.$$

Daraus wird zunächst durch einfache Umformungen

$$d\psi = d\varphi \frac{1 + \varepsilon_t + r \frac{d\varepsilon_t}{dr}}{1 + \varepsilon_r}.$$

Nun sind die ε kleine Zahlen. Würden wir sie ganz vernachlässigen, so erhielten wir $d\psi = d\varphi$, was ja auch in erster Annäherung richtig ist. Wir wollen aber gerade den geringen Unterschied zwischen $d\psi$ und $d\varphi$ feststellen, müssen daher die Glieder von der Ordnung der ε beibehalten. Dagegen macht es nichts aus, wenn wir Glieder von der Ordnung ε^2 vernachlässigen. Mit Rücksicht darauf läßt sich der vorhergehende Ausdruck vereinfachen, indem man Zähler und Nenner mit $(1 - \varepsilon_r)$ multipliziert und hierauf die Quadrate und Produkte der ε streicht. Hierdurch erhält man

$$d\psi = d\varphi \left(1 + \varepsilon_t + r \frac{d\varepsilon_t}{dr} - \varepsilon_r\right).$$

Drücken wir hierauf die ε in den Spannungen σ_r und σ_t aus, so erhalten wir für die verhältnismäßige Änderung des Zentriwinkels

$$\frac{d\psi - d\varphi}{d\varphi} = \frac{1}{E}\left(\frac{m+1}{m}(\sigma_t - \sigma_r) + r \frac{d}{dr}\left(\sigma_t - \frac{1}{m}\sigma_r\right)\right).$$

In dieser Gleichung sind nun noch die Ausdrücke für die Spannungen σ_r und σ_t einzusetzen, die sich aus s_r und s_t durch Division mit der Scheibendicke h ergeben. Wir wollen diese aus den Gleichungen (70) entnehmen, indem wir uns vorbehalten, für die darin vorkommenden Konstanten c nachträglich noch deren inzwischen ermittelten Werte einzusetzen. Dann geht die vorige Gleichung über in

$$\frac{d\psi - d\varphi}{d\varphi}$$

$$= \frac{1}{hE}\left\{\frac{m+1}{m}\left(2c_3 - \frac{2c_1}{r^2}\right) + r\frac{d}{dr}\left(\cdots - \frac{m+1}{m}\frac{c_1}{r^2} + \frac{m-1}{m} 2c_3 \lg r\right)\right\}.$$

Hierbei sind durch die Punkte ... die konstanten Glieder angedeutet, die bei der Differentiation nach r doch wieder

fortfallen. Die weitere Ausrechnung liefert sofort das einfache Ergebnis

$$\frac{d\psi - d\varphi}{d\varphi} = \frac{4c_3}{hE}. \tag{78}$$

Nachträglich kann man nun noch den Wert der Konstanten c_3 aus den Gleichungen (73) einsetzen. Hiermit ist das zunächst gesteckte Ziel erreicht.

Nun ist aber in Gl. (78) die elastische Winkeländerung $d\psi - d\varphi$ als unabhängig von r erkannt. In Verbindung mit der weiteren Bedingung, daß sich die ursprünglich rechten Winkel an den Ecken des Elements $ABCD$ in Abb. 12 nicht ändern durften, folgt daraus, daß wir die Gestalt des Ringsektors nach der Formänderung dadurch erhalten können, daß wir wiederum einen Ringsektor zeichnen, dessen Zentriwinkel in dem durch Gl. (78) angegebenen Verhältnis vergrößert ist, während jedem Radius r ein anderer Radius r' entspricht, so daß

$$r' d\psi = r d\varphi\,(1 + \varepsilon_t)$$

ist. Denn damit erreichen wir, daß jedes Scheibenelement $ABCD$ in jene Gestalt übergeführt wird, die ihm, wie die vorhergehenden Betrachtungen lehren, nach der Formänderung zukommt. Die Querschnitte oder die auf der Scheibe in radialer Richtung gezogenen Linien bleiben daher bei der Formänderung eben oder gerade.

In § 43 des dritten Bandes (3. Aufl.) war auf Grund der Voraussetzung, daß die Querschnitte bei der Biegung eines stark gekrümmten Stabes eben blieben, die Folgerung abgeleitet worden, daß sich die Verteilung der Biegungsspannungen (also der Spannungen σ_t nach der hier gebrauchten Bezeichnung) durch einen Hyberbelbogen darstellen lasse. Diese übliche Folgerung ist nun freilich, wie aus den genauen Formeln (74) für den Ringsektor hervorgeht, nicht ganz richtig. Der Grund für die Abweichung liegt darin, daß bei der dort wiedergegebenen elementaren Ableitung keine Rücksicht darauf genommen wurde, daß neben den Spannungen σ_t notwendig auch noch Spannungen σ_r vorkommen müssen, die ebenfalls

einen Einfluß auf die Formänderung ausüben. Will man auf Grund der Voraussetzung, daß die Querschnitte bei der Biegung unter allen Umständen eben blieben, wirklich streng weiter rechnen, so darf man den Einfluß der Spannungen σ_r auf die Formänderung nicht vernachlässigen. In der Tat ist aber, wie hinzugefügt werden muß, der Unterschied zwischen der genauen Formel für σ_t in Gl. (74) und der üblichen Annahme des hyperbolischen Gesetzes für die Spannungsverteilung nur gering. Wer es für angemessen hält, bei der Berechnung von Haken usf. die Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte zu Grunde zu legen, braucht sich daher durch den Einwand, daß eigentlich auch die Spannungen σ_r zu berücksichtigen seien, nicht stören zu lassen. Der Fehler, der durch deren Vernachlässigung begangen wird, kommt gegenüber der von vornherein ganz unsicheren Rechnungsgrundlage überhaupt nicht in Betracht.

Bei den Rechnungen dieses Paragraphen wurde nur der Fall behandelt, daß die gekrümmten Seitenflächen des Ringsektors frei von Lasten sein sollten. Man kann aber die am Ende des vorhergehenden Paragraphen gegebene allgemeinere Lösung durch eine andere Bestimmung der Konstanten c ebensogut auch dem Falle anpassen, daß der Ringsektor etwa auf der äußeren bogenförmigen Begrenzung einer gleichförmig verteilten, in radialer Richtung gehenden Belastung ausgesetzt ist. Die Bedingungen an den Endquerschnitten sind dann auch entsprechend zu ändern, so daß die dort übertragenen Kräfte mit den angegebenen Lasten im Gleichgewichte stehen. Es ist aber jetzt nicht nötig, darauf weiter einzugehen.

§ 13. Der volle Ring.

Wir wollen jetzt ferner die in den Gleichungen (69) und (70) gegebene Lösung auf den Fall übertragen, daß die Scheibe einen von zwei konzentrischen Kreisen gebildeten geschlossenen Ring bildet. Den Grenzbedingungen genügen wir dann durch die Annahme, daß die innere und äußere Grenze einer ringsum

konstanten Belastung in radialer Richtung ausgesetzt ist. Da diese Belastung nur in einem Drucke bestehen kann, der mit p_a und p_b bezeichnet werden soll, haben wir

$$(s_r)_{r=a} = -p_a; \quad (s_r)_{r=b} = -p_b \tag{79}$$

zu setzen. Durch diese beiden Bedingungen lassen sich aber die drei in den Gleichungen (70) vorkommenden willkürlichen Konstanten c nicht völlig bestimmen.

In der Tat kommt aber hier auch noch eine neue Bedingung hinzu, nämlich die, daß bei der Formänderung jeder aus dem Ringmittelpunkte gezogene Kreis wieder in einen geschlossenen Kreis übergehen muß. Eine Änderung des Zentriwinkels, wie sie bei dem Ringsektor möglich war, ist hier ausgeschlossen. Da bei der Untersuchung der elastischen Formänderung im vorigen Paragraphen, die zur Ableitung von Gl. (78) führte, die Konstanten c unmittelbar aus der auch hier zu Grunde liegenden Gl. (70) übernommen waren; ohne Rücksicht auf die den einzelnen Belastungsfällen entsprechenden besonderen Werte dieser Konstanten, können wir Gl. (78) zur Verwertung der Bedingung, der die Formänderung in dem jetzt vorliegenden Falle unterworfen ist, ohne weiteres benutzen. Damit keine Änderung des Zentriwinkels eintritt, muß man nach Gl. (78)

$$c_3 = 0$$

setzen. Für die beiden anderen Konstanten erhält man dann durch Auflösen der Gleichungen (79)

$$c_1 = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}(p_b - p_a); \quad c_2 = \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{2(b^2 - a^2)},$$

womit die Gleichungen (70) für den hier vorliegenden Fall übergehen in

$$\left.\begin{aligned} s_r &= \frac{r^2(a^2 p_a - b^2 p_b) + a^2 b^2 (p_b - p_a)}{r^2(b^2 - a^2)} \\ s_t &= \frac{r^2(a^2 p_a - b^2 p_b) - a^2 b^2 (p_b - p_a)}{r^2(b^2 - a^2)} \end{aligned}\right\}. \tag{80}$$

Setzt man hierin nachträglich noch $p_b = 0$ und schreibt an Stelle von p_a einfacher p, so kommt man damit wieder

auf die schon im dritten Bande für die dickwandigen Röhren abgeleiteten Formeln (219).

Aus den Gleichungen (80) erhält man ferner

$$s_r + s_t = 2\,\frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2}$$

also eine Konstante. Das ist aber, worauf schon in § 8 hingewiesen war, die Bedingung dafür, daß die Länge des Körpers in der Richtung senkrecht zur Scheibenebene gleichgültig ist, so daß die Lösung von der Scheibe unmittelbar und zwar genau auch auf eine beliebig lange Röhre übertragen werden kann.

§ 14. Das Ringgeschütz.

Hier schalte ich einen Paragraphen ein, der eine wichtige praktische Anwendung der vorher vorgetragenen Theorie bildet und den ich aus diesem Grunde in die beiden ersten Auflagen des dritten Bandes aufgenommen, in der dritten Auflage aber wegen Platzmangels weggelassen hatte, so daß er jetzt nachgetragen werden muß. Der Paragraph kann auch ohne Bezugnahme auf das Vorhergehende im Anschlusse an § 56 der dritten Auflage des dritten Bandes gelesen werden und schließt sich in der Art der Behandlung an die soeben genannte Stelle an.

Wenn ein Gefäß einem sehr hohen inneren Überdrucke ausgesetzt ist, wie z. B. ein Geschützlauf oder der Zylinder einer hydraulichen Presse, nützt die Vergrößerung der Wandstärke schließlich nicht mehr viel, da sich die außen hinzukommenden Schichten viel weniger an der Aufnahme der Spannungen beteiligen, als die inneren, die dadurch entlastet werden sollen. Man hilft sich dann oft damit, daß man das Rohr aus zwei Teilen herstellt, von denen der äußere auf einen etwas kleineren Durchmesser ausgebohrt wird, als der äußere Durchmesser des inneren Rohrs, auf das er aufgesteckt werden soll. Um das eine Rohr über das andere schieben zu können, erwärmt man es um so viel, daß es darüber geht. Beim Abkühlen wird dann das innere Rohr zusammengepreßt und das äußere bleibt etwas ausgedehnt. Dadurch kommen

von vornherein Spannungen in das zusammengesetzte Rohr, Zugspannungen σ_t im äußeren und Druckspannungen σ_t im inneren Teile. Wenn nun ein Schuß abgefeuert oder sonst das Rohr einem innern Überdrucke ausgesetzt wird, treten überall noch Zugspannungen σ_t hinzu. An der Innenseite des Rohrs bewirken diese zunächst nur eine Verminderung oder Aufhebung der vorher dort bestehenden Druckspannungen und nur der Überschuß über diese kommt wirklich zur Geltung. Im äußeren Teile dagegen addieren sich die aus beiden Ursachen stammenden Zugspannungen einfach. Man erreicht durch diese Anordnung daher eine gleichmäßigere Ausnutzung des Materials, die natürlich noch gesteigert werden kann, wenn man das Rohr statt aus zwei, aus drei oder noch mehr Teilen zusammensetzt. Hier genügt aber die Behandlung des einfachsten Falles.

Es wird am besten sein, wenn ich die Rechnungen sofort im Anschluß an ein bestimmtes Zahlenbeispiel durchführe, weil man so eine anschaulichere Vorstellung gewinnt. Die drei Halbmesser des zusammengesetzten Rohres seien der Reihe nach mit a, b, c bezeichnet und es sei $a = 10$, $b = 15$, $c = 20$ cm. Beim Aufziehen möge das äußere Rohr bei 100° C. Temperaturunterschied gerade auf das innere gepaßt haben. Man wird zunächst ermitteln, mit welchem Drucke beide Rohre nach dem Erkalten aufeinander sitzen und wie groß die Beanspruchung des Materials an den einzelnen Stellen ist, wenn das Rohr ganz sich selbst überlassen ist.

Der Unterschied zwischen dem inneren Halbmesser des äußeren und dem äußeren Halbmesser des inneren Rohrs im spannungslosen Zustande bei gleicher Temperatur sei mit δb bezeichnet. Mit dem Ausdehnungskoeffizienten $\frac{1}{80\,000}$ für 1° C. hat man

$$\delta b = \frac{b}{80\,000} \cdot 100 = 0{,}187 \text{ mm}.$$

Die Durchmesser unterscheiden sich um das Doppelte, also um $\frac{3}{8}$ mm.

Für die sich auf das innere Rohr beziehenden Größen wollen wir den Zeiger 1, für die des äußeren Rohrs den Zeiger 2 benutzen. Für die elastische Verschiebung u in der Richtung des Radius haben wir dann nach den Untersuchungen von § 56 des dritten Bandes (Gl. (215)):

$$u_1 = B_1 x + \frac{C_1}{x}; \quad u_2 = B_2 x + \frac{C_2}{x}. \tag{81}$$

Es handelt sich jetzt um die Bestimmung der vier Integrationskonstanten $B_1\, C_1\, B_2\, C_2$. Dazu müssen wir ähnlich verfahren wie früher, nämlich die Bedingungen benutzen, daß außen und hier zugleich auch innen σ_r zu Null wird, daß ferner σ_r bei $x = b$ für beide Rohre gleich wird und daß schließlich u_1 und u_2 sich bei $x = b$ um einen bekannten Betrag voneinander unterscheiden.

Für σ_r hat man nach Gl. (216) des dritten Bandes

$$\sigma_{r,1} = B_1' - \frac{C_1'}{x^2}, \quad \sigma_{r,2} = B_2' - \frac{C_2'}{x^2},$$

wenn wie früher zur Abkürzung

$$B_1' = \frac{mE}{m-1} B_1, \quad C_1' = \frac{mE}{m+1} C_1,$$

$$B_2' = \frac{mE}{m-1} B_2, \quad C_2' = \frac{mE}{m+1} C_2$$

gesetzt wird. Die ersten drei Bedingungsgleichungen lauten daher

$$\left.\begin{aligned} B_1' - \frac{C_1'}{a^2} &= 0, \\ B_2' - \frac{C_2'}{c^2} &= 0, \\ B_1' - \frac{C_1'}{b^2} &= B_2' - \frac{C_2'}{b^2}. \end{aligned}\right\} \tag{82}$$

Zur Aufstellung der vierten bedenke man, daß sich das äußere Rohr jedenfalls im gedehnten Zustande befindet, u_2 also überall positiv ist, während das innere Rohr zusammengedrückt wird, u_1 also negativ ist. An der Grenze beider Rohrteile muß die Summe der Absolutbeträge von u_1 und u_2

gleich dem ursprünglichen Unterschiede δb der Radien sein, denn das gegenseitige Nachgeben um u_1 bzw. u_2 bringt beide Rohre zum Passen. Man hat also mit Beachtung des negativen Vorzeichens von u_1

$$[u_2]_{x=b} - [u_1]_{x=b} = \delta b,$$

oder, wenn man die Werte aus Gl. (81) einsetzt

$$B_2 b + \frac{C_2}{b} - B_1 b - \frac{C_1}{b} = \delta b.$$

wofür auch mit Benutzung der Unbekannten B_1' usf.

$$(m-1)(B_2' - B_1') + (m+1)\frac{C_2' - C_1'}{b^2} = mE\frac{\delta b}{b} \tag{83}$$

geschrieben werden kann. Die vier Gleichungen (82) und (83) sind jetzt nach den darin überall im ersten Grade vorkommenden Unbekannten aufzulösen. Man erhält dadurch

$$\left.\begin{aligned} B_1' &= -\frac{c^2-b^2}{c^2-a^2}\cdot\frac{E\delta b}{2b}; \quad C_1' = -a^2\frac{c^2-b^2}{c^2-a^2}\cdot\frac{E\delta b}{2b} \\ B_2' &= \frac{b^2-a^2}{c^2-a^2}\cdot\frac{E\delta b}{2b}; \quad C_2' = c^2\frac{b^2-a^2}{c^2-a^2}\cdot\frac{E\delta b}{2b} \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

und für die ursprünglichen Unbekannten B_1 usf.

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= -\frac{c^2-b^2}{c^2-a^2}\cdot\frac{m-1}{2m}\frac{\delta b}{b}; \quad C_1 = -a^2\cdot\frac{c^2-b^2}{c^2-a^2}\frac{m+1}{2m}\frac{\delta b}{b} \\ B_2 &= \frac{b^2-a^2}{c^2-a^2}\cdot\frac{m-1}{2m}\frac{\delta b}{b}; \quad C_2 = c^2\cdot\frac{b^2-a^2}{c^2-a^2}\frac{m+1}{2m}\frac{\delta b}{b} \end{aligned}\right\}. \tag{85}$$

Durch Einsetzen der Zahlenwerte und mit $m = \frac{10}{3}$ und $E = 25 \cdot 10^5$ atm (für Gußstahl) wird dies

$$\begin{aligned} B_1' &= -911 \text{ atm}; & C_1' &= -91\,100 \text{ kg}; \\ B_2' &= 651 \text{ atm}; & C_2' &= 260\,400 \text{ kg}; \\ B_1 &= -255 \cdot 10^{-6}; & C_1 &= -474 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2; \\ B_2 &= 182 \cdot 10^{-6}; & C_2 &= 1354 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Für den Druck zwischen beiden Rohren, der mit σ_b bezeichnet werden mag, erhält man jetzt

$$\sigma_b = B_1' - \frac{C_1'}{b^2} = -911 + \frac{91\,100}{225} = -506 \text{ atm}$$

oder auch allgemeiner

$$\sigma_b = -\frac{(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)}{2b^2(c^2 - a^2)} \cdot E\frac{\delta b}{b}. \tag{86}$$

Für die Spannungen σ_r und σ_t an irgend einer anderen Stelle des äußeren Rohrs kann man jetzt ohne weiteres die Gl. (219) des dritten Bandes anwenden, wenn man nur berücksichtigt, daß an Stelle von a und b hier b und c treten und zugleich an Stelle von p den Absolutbetrag von σ_b nimmt. Auch für das innere Rohr kann man diese Spannungen leicht ermitteln. Wir wollen uns aber damit jetzt nicht aufhalten und nur noch die reduzierten Spannungen σ'_{red} an der Innenseite des inneren und σ''_{red} an der Innenseite des äußeren Rohrs berechnen. Dafür erhält man

$$\sigma'_{\text{red}} = E\left[\frac{u_1}{x}\right]_{x=a} = E\left(B_1 + \frac{C_1}{a^2}\right) = -E\frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2}\frac{\delta b}{b} = -1820 \text{ atm}$$

$$\sigma''_{\text{red}} = E\left[\frac{u_2}{x}\right]_{x=b} = E\left(B_2 + \frac{C_2}{b^2}\right)$$
$$= E\frac{b^2 - a^2}{c^2 - a^2} \cdot \frac{\delta b}{b}\left\{\frac{m-1}{2m} + \frac{c^2}{b^2}\frac{m+1}{2m}\right\} = +1960 \text{ atm}.$$

Nun sei angenommen, daß auf das so zusammengesetzte Rohr ein innerer Überdruck einwirkt, daß also etwa ein Schuß abgefeuert wird. Wir wollen auch hier eine bestimmte Zahlenangabe zu Grunde legen und annehmen, daß der innere Überdruck $p = 2000$ atm betrage. Durch diesen inneren Überdruck werden von neuem elastische Formänderungen und Spannungen hervorgerufen, die sich den ursprünglich vorhandenen zugesellen. Voraussetzung ist dabei nur, daß die Proportionalitätsgrenze des Materials nicht überschritten wird. Um diese neu hervorgerufenen Spannungen zu berechnen, können wir das Rohr als aus einem Stück bestehend ansehen und die dafür gültigen Formeln unmittelbar anwenden. Dabei brauchen wir uns nur um die reduzierten Spannungen an den Innenseiten beider Rohrteile zu kümmern, da die Beanspruchung des Materials sonst jedenfalls überall geringer ist, als an diesen beiden Stellen. Aus den Untersuchungen des § 56 des

dritten Bandes folgt für irgend einen Abstand x vom Mittelpunkte

$$\sigma_{red} = E\frac{u}{x} = p\frac{a^2}{b^2 - a^2}\left\{\frac{m-1}{m} + \frac{m+1}{m}\frac{b^2}{x^2}\right\},$$

wobei aber jetzt an Stelle von b der äußere Radius des ganzen Rohrs, also c zu setzen ist.

Für $x = 10$ cm gibt dies $\sigma_{red} = +\ 3930$ atm und für $x = 15$ cm wird $\sigma_{red} = +\ 2010$ atm.

Die im ganzen auftretende Beanspruchung des Materials während des Abfeuerns eines Schusses ergibt sich durch Summierung dieser reduzierten Spannungen zu den anfänglich vorhandenen, also an der Innenseite des inneren Rohrs

$$= -\ 1820 + 3930 = +\ 2110 \text{ atm},$$

an der Innenseite des äußeren Rohrs

$$= +\ 1960 + 2010 = +\ 3970 \text{ atm}.$$

Im inneren Rohre ist also das Material sehr stark entlastet; dafür ist aber die Beanspruchung des äußeren Rohrs zu groß geworden. Man hatte also δb zu groß gewählt und wird darnach die Anordnung abzuändern haben. Am vorteilhaftesten wird man δb so wählen, daß die Beanspruchung beider Rohrteile gleich groß wird. Um dies zu erreichen, kann man entweder durch Probieren, d. h. durch Wiederholung der vorigen Rechnung für eine andere Wahl von δb den vorteilhaftesten Wert dieses Unterschiedes ermitteln oder man kann auch unmittelbar nach Anleitung der vorausgehenden Untersuchungen eine Gleichung für δb aufstellen. Es wird nicht nötig sein, dies weiter auszuführen.

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß sich diese Rechnungen ohne erhebliche Änderung auch auf den Fall anwenden lassen, daß ein Rohr auf einen Vollzylinder aufgezogen wird. Man braucht dann nur $a = 0$ zu setzen; die Konstante C_1 geht dann nach Gl. (85) von selbst in Null über, wie es sein muß, damit u_1 für $x = 0$ verschwindet. Man kann also darnach z. B. berechnen, wie groß der Unterschied δb der beiden Radien einer Welle und der Bohrung

einer Kurbel, die auf jene warm aufgezogen werden soll, genommen werden darf, ohne daß die Materialbeanspruchung das zulässige Maß überschreitet.

Eine Bemerkung ist vielleicht noch am Platze, obschon sie eigentlich nur Selbstverständliches enthält. Sobald nämlich unter einem starken Überdrucke die Proportionalitätsgrenze des Materials überschritten wird, ändert sich die Verteilung der Spannungen gegenüber der hier berechneten ab. Wenn z. B. bei einem einfachen Geschützrohre σ_{red} an der Innenseite über die Elastizitätsgrenze hinausgeht, tritt hier eine bleibende Dehnung ein und die weiter nach außen liegenden Teile werden dann stärker in Anspruch genommen. Nach Aufhören des Überdruckes verhält sich das einfache Rohr dann ähnlich wie ein aus zwei Stücken zusammengesetztes. Es ist aber klar, daß man solche bleibende Formänderungen vermeiden möchte, da sie ein genaues Passen des Kolbens bzw. des Geschosses auf die Dauer unmöglich machen.

§ 15. Allgemeinere Lösungen der Gleichung für die Spannungsfunktion im Ringsektor.

In § 11 war die allgemeine Gleichung für die Spannungsfunktion in Polarkoordinaten, nämlich Gl. (67)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\right) = 0$$

aufgestellt worden. Die nachher folgenden Erörterungen bezogen sich nur auf jene Lösungen dieser Gleichung, bei denen F unabhängig von φ ist. Man kann aber auch allgemeinere Lösungen angeben, aus denen sich ebenfalls noch mit verhältnismäßig geringer Mühe praktisch bedeutsame Ergebnisse ableiten lassen.

Zu diesem Zwecke setze man

$$F = A \sin n\varphi, \tag{87}$$

worin A eine Funktion von r allein und n irgend eine ganze positive Zahl bedeute. Dann läßt sich leicht zeigen, daß dieser

Wert eine Lösung der Gleichung für die Spannungsfunktion ist, falls man die Funktion A von r passend wählt. Zunächst wird nämlich

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} = \sin n\varphi \left\{\frac{d^2 A}{dr^2} - n^2 \frac{A}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{dA}{dr}\right\}$$

und wenn man dieselbe Operation zweimal hintereinander ausführt, geht die Gleichung für die Spannungsfunktion über in

$$\sin n\varphi \cdot \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{n^2}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^2 A = 0\,.$$

Hiernach muß A nur so bestimmt werden, daß es der totalen Differentialgleichung genügt, die nach Wegheben des Faktors $\sin n\varphi$ stehen bleibt. Um deren Lösung zu finden, ermittle man zunächst eine Funktion B von r, die der Gleichung

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{n^2}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right) B = 0$$

genügt, also einer Gleichung, bei der im Gegensatze zur Gleichung für A der in der Klammer eingeschlossene Operator nur einmal vorkommt. Nach Multiplikation mit r^2 läßt sich die Gleichung für B auch schreiben

$$r^2 \frac{d^2 B}{dr^2} - n^2 B + r\frac{dB}{dr} = 0\,.$$

Man sieht leicht, daß man der Gleichung durch eine Potenz von r genügen kann, deren Exponent als Wurzel einer quadratischen Gleichung gefunden wird. Die Lösung ist nämlich

$$B = \alpha_1 r^n + \beta_1 r^{-n}\,,$$

wenn die Integrationskonstanten mit α_1 und β_1 bezeichnet werden. Die Funktion A muß daher jetzt, wenn man wiederum zuvor beiderseits mit r^2 multipliziert, der Gleichung

$$r^2 \frac{d^2 A}{dr^2} - n^2 A + r\frac{dA}{dr} = \alpha_1 r^{n+2} + \beta_1 r^{-n+2}$$

genügen. Auch deren Lösung bildet, falls n mindestens gleich 2 ist, eine Summe von Potenzen von r, nämlich

$$A = \alpha r^{n+2} + \beta r^{-n+2} + \gamma r^n + \delta r^{-n}\,, \tag{88}$$

wenn mit α und β neue Konstanten bezeichnet werden, die mit α_1 und β_1 in einem leicht ersichtlichen Zusammenhange stehen, auf den es aber jetzt nicht weiter ankommt. Für den Fall $n = 1$ lautet dagegen die allgemeine Lösung

$$A = \alpha r^3 + \beta r \lg r + \gamma r + \delta r^{-1}. \tag{89}$$

Hiernach ist für jedes ganze positive n, das größer ist als 1, der Ausdruck

$$F = (\alpha r^{n+2} + \beta r^{-n+2} + \gamma r^n + \delta r^{-n}) \sin n\varphi \tag{90}$$

eine Spannungsfunktion. Für $n = 1$ ist ebenso

$$F = \left(\alpha r^3 + \beta r \lg r + \gamma r + \frac{\delta}{r}\right) \sin \varphi \tag{91}$$

eine Spannungsfunktion. An Stelle des Sinus darf man auch den Kosinus nehmen. Ferner kann man auch eine Reihe von solchen Einzellösungen zusammenfassen und daraus eine allgemeinere Lösung zusammenstellen. Von praktischer Bedeutung sind aber zunächst nur die einfacheren Fälle. Legen wir z. B. Gleichung (91) zu Grunde, so erhalten wir nach den Gleichungen (66)

$$\left.\begin{aligned} s_r &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} = \sin\varphi\left\{2\alpha r + \frac{\beta}{r} - \frac{2\delta}{r^3}\right\} \\ s_t &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = \sin\varphi\left\{6\alpha r + \frac{\beta}{r} + \frac{2\delta}{r^3}\right\} \\ t &= -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right) = -\cos\varphi\left\{2\alpha r + \frac{\beta}{r} - \frac{2\delta}{r^3}\right\} \end{aligned}\right\}. \tag{92}$$

Hiernach steht bei diesem Spannungszustande t mit s_r in einem einfachen Zusammenhange, indem der Klammerausdruck bei beiden übereinstimmt. Verfügen wir über die drei Konstanten $\alpha\beta\delta$ beim Ringsektor so, daß dieser Klammerausdruck für $r = a$ und für $r = b$ verschwindet, indem wir also

$$2\alpha a + \frac{\beta}{a} - \frac{2\delta}{a^3} = 0 \quad \text{und} \quad 2\alpha b + \frac{\beta}{b} - \frac{2\delta}{b^3} = 0$$

setzen, so kommen wir wieder auf den Fall der **Biegungsbeanspruchung eines krummen Stabes**, dessen gekrümmte Seitenflächen unbelastet sind, so daß die Lasten nur an den

Endquerschnitten angreifen. Dagegen handelt es sich jetzt nicht mehr um eine reine Biegung. Wenn z. B. der Ringsektor ein Quadrant ist, der sich von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{\pi}{2}$ erstreckt, so fallen zwar im Querschnitte $\varphi = \frac{\pi}{2}$ die Schubspannungen ebenfalls überall fort; im Querschnitte $\varphi = 0$ verschwinden sie aber nicht, sondern sie lassen sich zu einer Resultierenden zusammensetzen, die sich leicht berechnen läßt. Dagegen fallen die Normalspannungen s_t in diesem Querschnitte weg. Im anderen Endquerschnitte tritt neben dem Biegungsmomente noch eine Normalkraft auf, die sich als Summe aller s_t ermitteln läßt, und sich ebenso groß ergibt wie vorher die resultierende Schubspannung.

Eine Anzahl anderer Fälle, die immerhin von einer gewissen praktischen Bedeutung sind, läßt sich durch Anpassung der aufgestellten einfachen Lösungen an passend gewählte Grenzbedingungen ebenfalls noch ohne jede Schwierigkeit aufstellen. Der Leser wird sich aber darin nun selbst leicht weiterzuhelfen vermögen.

§ 16. Die rotierende Scheibe.

Eine sehr schnell umlaufende kreisförmige Scheibe, deren Umdrehungsachse zugleich eine Symmetrieachse ist, wird durch die Zentrifugalkräfte in einen Spannungszustand versetzt, der ebenfalls nur eine Funktion des Abstandes r von der Scheibenmitte ist, und um dessen Untersuchung es sich hier handeln soll. Verhältnismäßig einfach läßt sich die Aufgabe lösen, wenn die Scheibendicke h als konstant betrachtet werden kann, wie es z. B. bei Schleifsteinen oder Schmirgelscheiben zutrifft. Bei der Konstruktion von Dampfturbinen wendet man dagegen, um eine größere Festigkeit der durch die Zentrifugalkräfte sehr stark beanspruchten Räder zu erzielen, Scheiben an, deren Dicke h sich von der Nabe aus nach dem Umfange hin erheblich vermindert. Die Dicke h ist in diesem Falle als eine Funktion von r zu betrachten, die entweder bei der Vornahme

der Festigkeitsuntersuchung von vornherein gegeben sein kann oder deren Ermittelung erst noch verlangt wird, so nämlich, daß dadurch eine möglichst hohe Festigkeit der Scheibe gegenüber der auftretenden Belastung herbeigeführt wird.

Wir wollen hier den verwickelteren Fall einer veränderlichen Scheibendicke von vornherein zu Grunde legen; die einfacheren Formeln für den Fall einer konstanten Dicke ergeben sich aus den nachfolgenden leicht, indem man darin nachträglich überall den Differentialquotienten von h nach r gleich Null setzt.

Wegen der Symmetrie der Gestalt und der Belastung sind die auf die Längeneinheit bezogenen Spannungskomponenten s_r und s_t von vornherein als Hauptspannungen der ebenen Spannungsverteilung zu betrachten, auf die wir die Aufgabe dadurch zurückführen, daß wir den Körper in dem früher näher erläuterten Sinne als eine „Scheibe" ansehen. Wir untersuchen das Gleichgewicht eines durch zwei benachbarte Radien und zwei benachbarte konzentrische Kreise abgegrenzten Scheibenelementes, das also von derselben Gestalt ist, wie das in Abb. 9, S. 69 gezeichnete. Gegenüber dieser Abbildung fallen jedoch hier die Schubspannungen an den Seitenflächen des Elementes weg, während eine in radialer Richtung gehende Massenkraft, nämlich die Zentrifugalkraft, als Belastung hinzutritt. Bezeichnen wir die Masse der Raumeinheit mit μ und die Winkelgeschwindigkeit der Scheibenbewegung mit ϖ, so ist diese Kraft gleich

$$\mu \cdot dr \cdot r d\varphi \cdot h \cdot \varpi^2 r$$

zu setzen, wofür kürzer auch

$$\varkappa h r^2 dr\, d\varphi$$

geschrieben werden kann, wenn man zur Abkürzung den konstanten Wert $\mu \varpi^2$ mit $\varkappa$ bezeichnet. Das Gleichgewicht der Kräfte gegen Verschieben in radialer Richtung liefert, wie man sieht, zunächst die Gleichung

$$s_t dr\, d\varphi = \frac{d}{dr}(s_r r\, d\varphi)\, dr + \varkappa h r^2 dr\, d\varphi,$$

die sich durch Wegheben der gemeinschaftlichen Faktoren $dr\,d\varphi$ zu

$$s_t = \frac{d}{dr}(r s_r) + \varkappa h r^2 \qquad (93)$$

vereinfachen läßt. Aus Gleichgewichtsbetrachtungen läßt sich sonst nichts mehr entnehmen; dagegen sind die beiden Unbekannten s_r und s_t noch durch eine Gleichung miteinander verbunden, die ausdrückt, daß beide Hauptspannungen mit dem Formänderungszustande der Scheibe verträglich sein müssen. Mit jener Annäherung, die schon darin ausgesprochen ist, daß wir den Körper als eine Scheibe betrachten, wird der Formänderungszustand hinreichend durch die Angabe der elastischen Vergrößerung u beschrieben, die ein Radius r erfährt. Hierbei ist u eine zunächst unbekannte Funktion von r.

Von hier aus stehen nun für die weitere Behandlung zwei Wege offen, zwischen denen übrigens hinsichtlich der Beschwerlichkeit oder Bequemlichkeit kein großer Unterschied besteht. Man kann nämlich erstens auf Grund des Elastizitätsgesetzes s_r und s_t in u ausdrücken und die so erhaltenen Werte in Gl. (93) einführen, womit man eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Unbekannte u erhält, von deren Integration die Lösung der Aufgabe abhängt. Die Herren Stodola*) und Grübler**), die sich mit unserer Aufgabe zuerst ausführlicher beschäftigt haben, schlugen diesen ersten Weg ein. Hier soll dagegen, hauptsächlich wegen des Zusammenhanges mit den vorausgehenden Entwickelungen, der andere Weg benutzt werden, der in der Einführung einer Spannungsfunktion besteht, die jedoch hier von etwas anderer und zwar von einfacherer Art ist, als die früher verwendete.

Der Gleichung (93) genügt man nämlich, indem man setzt

$$\left.\begin{aligned} s_r &= \frac{F}{r} \\ s_t &= \frac{dF}{dr} + \varkappa h r^2 \end{aligned}\right\}. \qquad (94)$$

*) Zeitschr. d. Ver. D. Ing. 1903, S. 51.

**) Ebenda 1906, S. 535.

Die in dieser Weise definierte Spannungsfunktion F muß nun noch der Differentialgleichung genügen, die aus dem Zusammenhange zwischen dem Spannungszustande und dem Formänderungszustande hervorgeht. Für die auf die Längeneinheit bezogenen Dehnungen ε_r und ε_t in radialer und tangentialer Richtung hat man zunächst

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad \text{und} \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r}$$

und daher nach dem Elastizitätsgesetze

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{Eh}\left(s_r - \frac{1}{m}s_t\right)$$
$$\frac{u}{r} = \frac{1}{Eh}\left(s_t - \frac{1}{m}s_r\right).$$

Eliminiert man aus beiden Gleichungen u, indem man die zweite mit r multipliziert und hierauf nach r differentiiert, so erhält man

$$\frac{1}{h}\left(s_r - \frac{1}{m}s_t\right) = \frac{d}{dr}\left\{\frac{r}{h}\left(s_t - \frac{1}{m}s_r\right)\right\}. \tag{95}$$

Nach Einführung der Spannungsfunktion F aus den Gleichungen (94) findet man daraus nach einigen einfachen Umformungen

$$r\frac{d^2F}{dr^2} + \frac{dF}{dr} - \frac{F}{r} - \frac{1}{h}\frac{dh}{dr}\left(r\frac{dF}{dr} - \frac{1}{m}F\right) + \left(3 + \frac{1}{m}\right)\varkappa h r^2 = 0. \tag{96}$$

Von der Integration dieser Gleichung hängt nun die Lösung der Aufgabe ab. Für ein beliebiges h läßt sich die Integration nicht ausführen. Nimmt man dagegen an, daß sich die Veränderung der Dicke h mit dem Halbmesser r durch eine Gleichung von der Form

$$h = cr^n \tag{97}$$

ausdrücken läßt, in der n eine beliebige, ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl ist, so geht Gl. (96) über in

$$r\frac{d^2F}{dr^2} + (1-n)\frac{dF}{dr} - \left(1-\frac{n}{m}\right)\frac{F}{r} + \left(3+\frac{1}{m}\right)\varkappa c r^{n+2} = 0, \quad (98)$$

deren allgemeines Integral ohne weiteres in der Form

$$F = ar^{n+3} + Ar^{\alpha} + Br^{\beta} \quad (99)$$

angeschrieben werden kann. Dabei sind A und B die beiden willkürlichen Integrationskonstanten, während die drei übrigen Konstanten a, α und β durch Einsetzen des Ausdruckes (99) in Gl. (98) so zu bestimmen sind, daß die Gleichung befriedigt wird, was leicht ausgeführt werden kann. Insbesondere sind α und β, wie noch bemerkt werden mag, die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\alpha^2 - n\alpha - \left(1-\frac{n}{m}\right) = 0.$$

Nachdem F bekannt ist, findet man s_r und s_t nach den Gleichungen (94), worauf die Integrationskonstanten A und B aus den Grenzbedingungen zu ermitteln sind. Für den äußeren Umfang ist nämlich s_r gleich Null oder auch, je nach den näheren Umständen des einzelnen Falles, gleich einem gegebenen konstanten Werte. Dazu kommt noch eine Grenzbedingung an dem inneren Rande, falls die Scheibe ringförmig ist, oder wenn es sich um eine volle Scheibe handelt, die Bedingung, daß für $r = 0$ die beiden Hauptspannungen s_r und s_t einander gleich werden müssen.

Durch den Ansatz in Gl. (97) kann man sich bei passender Wahl von n der gegebenen Gestalt der Scheibe gewöhnlich schon recht genau anpassen. Nötigenfalls kann man sich aber auch die Grenzlinie des Scheibenquerschnitts durch zwei oder mehr Linien zusammengesetzt denken, von denen sich jede durch eine Gleichung von der Form (97) darstellen läßt. Dann gilt die Lösung (99) für jeden Scheibenabschnitt, der zu einer dieser Grenzkurven gehört. Für jeden weiteren Abschnitt hat man zwei neue willkürliche Integrationskonstanten, zu deren Ermittelung die Grenzbedingungen für den Übergang des einen Abschnittes in den anderen zur Verfügung stehen. Die Spannungen s_r und s_t müssen nämlich an der Übergangs-

stelle stetig verlaufen. Herr Prof. Grübler hat diese Rechnung in seiner vorher angeführten Abhandlung näher auseinandergesetzt; hier erscheint eine Wiedergabe der ziemlich umständlichen Formeln nicht erforderlich.

Ist dagegen h nicht von vornherein gegeben, sondern wird im Gegenteile verlangt, h so als Funktion von r zu ermitteln, daß die auf die Flächeneinheit bezogene Spannung in tangentialer Richtung an allen Stellen denselben Wert σ_0 annimmt, der der zulässigen Beanspruchung des Materials entspricht, so gehen wir von Gl. (95) aus, die jetzt nach Ausführung der Division mit h in der Form

$$\sigma_r - \frac{1}{m}\sigma_0 = \frac{d}{dr}\left(r\left(\sigma_0 - \frac{1}{m}\sigma_r\right)\right)$$

angeschrieben werden kann. Die Ausführung der Differentiation liefert nach einigen Umformungen die Gleichung

$$r\frac{d\sigma_r}{dr} + (m+1)(\sigma_r - \sigma_0) = 0,$$

deren allgemeines Integral

$$\sigma_r = \sigma_0 + Cr^{-(m+1)}$$

ist, wenn mit C die Integrationskonstante bezeichnet wird. Setzt man nun $s_r = h\sigma_r$ und $s_t = h\sigma_0$ in die Gleichungen (94) und eliminiert daraus F, so erhält man eine Differentialgleichung erster Ordnung für h, deren Integral leicht in Form einer Exponentialfunktion angegeben werden kann, so jedoch, daß der Exponent ein Integral nach r bildet, dessen Auswertung eine umständliche Rechnung erfordert. Auch hier begnüge ich mich hinsichtlich der weiteren Ausrechnung mit einem Hinweise auf die Arbeiten der Herren Stodola und Grübler.

§ 17. Die Biegungsgleichung einer Platte.

In § 7 war diese Biegungsgleichung, nämlich die Differentialgleichung (45) für ζ_0 auf Grund einer ganz allgemein gehaltenen Betrachtung abgeleitet worden; jedoch nur für den

Fall, daß die Oberfläche der Platte keine Lasten trägt, die Biegung vielmehr nur durch Kräftepaare hervorgebracht wird, die am Rande der Platte angreifen. Hier ist diese Betrachtung zu ergänzen, so daß sie auch den früher ausgeschlossenen Fall mit umfaßt.

Dabei wird die Voraussetzung zu Grunde gelegt, die Formänderung der Platte von der Dicke h erfolge in der Art, daß sich jeder Punkt der die Dicke h halbierenden Mittelfläche der Platte nur in der Richtung senkrecht zur Mittelfläche, d. h. in der Z-Richtung verschiebt. Wir setzen also

$$\xi_0 = 0 \quad \text{und} \quad \eta_0 = 0$$

wenn, wie schon früher, der Zeiger 0 auf jene Punkte hinweist, für die $z = 0$ ist. Die Richtung der positiven Z-Achse mag mit der Richtung übereinstimmen, in der die Ausbiegung erfolgt, so daß also ζ_0 positiv ist. Als X- und als Y-Achse nehmen wir zwei sonst beliebige, aber senkrecht zueinander stehende Linien der Mittelfläche an.

Die Dicke h soll gegenüber den Abmessungen der Platte in der Mittelfläche als unendlich klein betrachtet werden. Die Ausbiegung ζ_0 soll aber nicht nur gegenüber der Breite und Länge der Platte, sondern auch im Verhältnisse zur Dicke h als klein vorausgesetzt werden. Dann erfährt eine Strecke, etwa dx, die in der Mittelfläche liegt, eine elastische Dehnung Δdx, die sich nach dem Pythagoräischen Satze zu

$$\Delta dx = dx \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta_0}{\partial x}\right)^2$$

berechnet und daher von höherer Ordnung klein ist, als die Dehnung der in einigem Abstande von der Mittelfläche in derselben Richtung gehenden Strecken, so daß sie gegen diese vernachlässigt werden kann. Im übrigen wird auf den Fall, daß ζ_0 nicht klein ist gegenüber h in § 24 noch näher eingegangen werden, worauf schon jetzt verwiesen werden möge.

Endlich soll bei der Berechnung der Spannungskomponenten σ_x, σ_y und τ_{xy}, die zu der betrachteten Formänderung gehören, vorausgesetzt werden, daß jede Normale von

der Länge h, die zur Mittelfläche gezogen wird, bei der Formänderung gradlinig und senkrecht zur elastischen Fläche bleibe, in die die Mittelfläche übergeht. Hierzu muß bemerkt werden, daß ja allerdings in Wirklichkeit eine geringe Krümmung dieser Normalen infolge der Schubspannungen τ_{xz} und τ_{yz} zu erwarten ist. Von vornherein läßt sich aber voraussehen, daß gerade wie bei einem Balken, dessen Querschnitte ebenfalls durch die Schubspannungen gekrümmt werden, der Einfluß dieser Krümmung auf die Längenänderungen so unbedeutend ist, daß er ohne weiteres vernachlässigt werden kann. Ebenso vernachlässigen wir, in Übereinstimmung mit der elementaren Biegungstheorie des Balkens, die Spannungen σ_z, die durch die auf der Platte ruhenden Lasten unmittelbar hervorgebracht werden, gegenüber den Biegungsspannungen σ_x und σ_y in den etwas weiter von der Mittelfläche abstehenden Schichten.

Auf Grund dieser Voraussetzungen berechnen wir zuerst die Verschiebungen ξ, η eines im Abstande z von der Mittelfläche liegenden Punktes, hieraus die Dehnungen ε_x und ε_y und auf Grund des Elastizitätsgesetzes die Spannungen σ_x und σ_y, worauf wir zur Betrachtung des Gleichgewichts der an einem Plattenelemente angreifenden Kräfte übergehen, aus der sich schließlich die Differentialgleichung ergeben wird, der die Ausbiegung ζ_0 genügen muß. Die ganze Aufgabe ist dann auf die Integration dieser Gleichung zurückgeführt, da mit ζ_0 auch der ganze Formänderungs- und Spannungszustand der Platte bekannt wird.

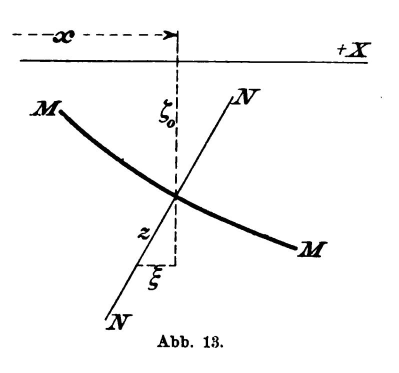


Abb. 13.

In Abb. 13 bedeutet MM ein Stück eines parallel zur XZ-Ebene durch die Mittelfläche geführten Schnittes, NN die Projektion der Normalen zur Mittelfläche auf diese Schnittebene. Man sieht aus der Abbildung ohne weiteres, daß der im

Abstande z von der Mittelfläche liegende Punkt der Platte eine Verschiebung ξ erfährt, die sich durch die erste der folgenden Gleichungen ausdrücken läßt:

$$\xi = -z\frac{\partial \zeta_0}{\partial x}; \quad \eta = -z\frac{\partial \zeta_0}{\partial y}. \tag{100}$$

Die Verschiebung η ergibt sich nämlich in derselben Weise. Die Dehnungen ε_x und ε_y erhält man hieraus durch Differentiation, also

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} \quad \text{und} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \eta}{\partial y} = -z\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2}. \tag{101}$$

Nach dem Elastizitätsgesetze ist daher

$$-z\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \frac{1}{m}\sigma_y\right)$$
$$-z\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \frac{1}{m}\sigma_x\right),$$

woraus man durch Auflösen nach σ_x und σ_y

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{mE}{m^2-1}\,z\left(m\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2}\right) \\ \sigma_y &= -\frac{mE}{m^2-1}\,z\left(m\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{102}$$

erhält. — Wir denken uns jetzt ein rechteckiges Plattenelement (Abb. 14) von den Seitenlängen dx und dy abgegrenzt, die wir als klein von derselben Ordnung ansehen können, wie die Plattendicke h. Auf einer Schnittfläche $h\,dy$ lassen sich die Normalspannungen σ_x zu einem Kräftepaar zusammenfassen, dessen Moment gleich

$$\int \sigma_x z\,dF = -\frac{mE}{m^2-1}\left(m\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2}\right)\int z^2 dF$$
$$= -\frac{mE}{m^2-1}\left(m\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2}\right)\cdot\frac{dy\,h^3}{12}$$

gesetzt werden kann. Auf der gegenüberliegenden Seitenfläche, und zwar auf jener, die in der Abbildung durch Schraffierung hervorgehoben ist, setzen sich die Normalspannungen σ_x ebenfalls zu einem Kräftepaare zusammen, das sich von dem

vorigen um ein Differential unterscheidet. Beide zusammen geben daher ein resultierendes Kräftepaar, dessen Moment gleich

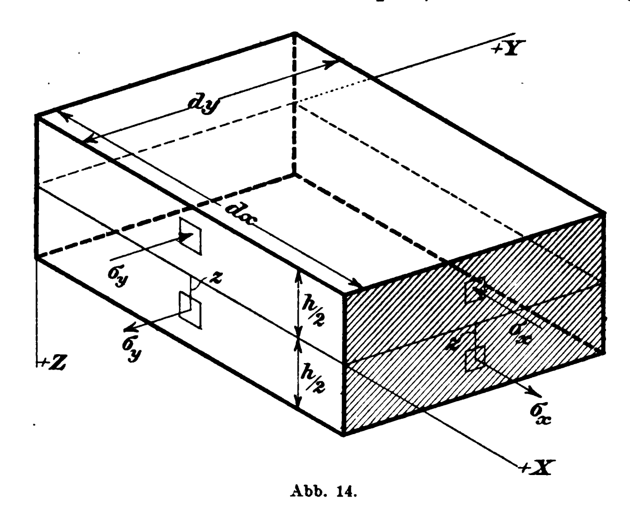


Abb. 14.

$$-\frac{mE}{m^2-1}\left(m\frac{\partial^3\zeta_0}{\partial x^3}+\frac{\partial^3\zeta_0}{\partial y^2\partial x}\right)\frac{h^3}{12}\,dx\,dy$$

ist. Falls dieser Ausdruck einen positiven Wert liefert, dreht das resultierende Kräftepaar in jenem Sinne, der aus den Pfeilen der σ_x an der schraffierten Fläche in Abb. 14 hervorgeht, d. h. der Momentenvektor geht in diesem Falle im Sinne der positiven Y-Achse.

Dieselbe Betrachtung läßt sich natürlich auch auf die Spannungen σ_y an den beiden anderen Schnittflächen übertragen. Das daraus hervorgehende resultierende Kräftepaar hat das Moment

$$-\frac{mE}{m^2-1}\left(m\frac{\partial^3\zeta_0}{\partial y^3}+\frac{\partial^3\zeta_0}{\partial x^2\partial y}\right)\frac{h^3}{12}\,dx\,dy$$

und wenn dieser Ausdruck einen positiven Wert liefert, dreht das resultierende Kräftepaar in jenem Sinne, wie er an der in Abb. 14 verdeckt liegenden Seitenfläche auftritt, falls man in den unteren Schichten (also bei positivem z) Zug- und in den oberen Druckspannungen annimmt. Daraus geht hervor, daß

der Momentenvektor des resultierenden Kräftepaares (immer vorausgesetzt, daß der vorhergehende Ausdruck positiv wird) im Sinne der negativen X-Achse dreht.

Die beiden Kräftepaare, auf die sich die Normalspannungen zurückführen ließen, können sich natürlich nicht miteinander im Gleichgewicht halten, da ihre Momentenvektoren verschiedene und zwar rechtwinklig zueinander stehende Richtungen haben. Sie müssen vielmehr mit jenen Kräftepaaren im Gleichgewicht stehen, die sich bei der Zusammensetzung der Schubspannungen ergeben.

Die in Abb. 14 nach vorn hin liegende Seitenfläche, also jene, deren äußere Normale in der Richtung der negativen Y-Achse geht, ist in Abb. 15 nochmals besonders heraus-

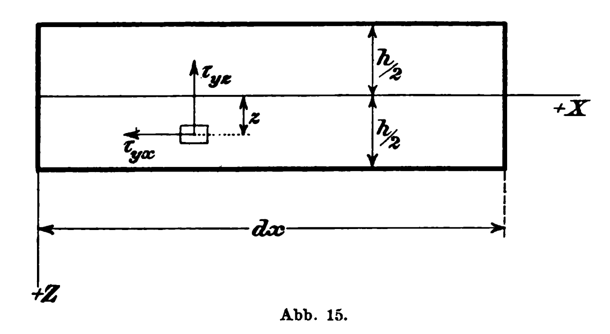


Abb. 15.

gezeichnet. An einem Flächenelemente dieser Seitenfläche greifen die Schubspannungskomponenten τ_{yx} und τ_{yz} an, die bei positiven Werten nach den früher allgemein getroffenen Festsetzungen in den Richtungen der negativen X- und Z-Achsen gehen. Da dx selbst als unendlich klein anzusehen ist, so daß sich die Formänderung innerhalb der Strecke dx nicht merklich ändert, kann man die Schubspannungskomponenten innerhalb der Seitenfläche als unabhängig von x betrachten. Dagegen ändert sich innerhalb der Seitenfläche der Formänderungszustand, trotzdem auch h als unendlich klein betrachtet wird, sehr erheblich beim Fortschreiten in der Z-Richtung.

Für τ_{yx} erhält man nach den Gleichungen (100)

$$\tau_{yx} = G\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) = -2Gz\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x \partial y}. \tag{103}$$

Hiernach wechselt τ_{yx} den Pfeil, wenn man von der unteren Hälfte der Seitenfläche auf die obere Hälfte übergeht. Die Schubspannungen τ_{yx} setzen sich daher zu einem Kräftepaar zusammen, dessen Moment gleich

$$\int \tau_{yx} z\, dF = -2G\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x \partial y}\int z^2 dF = -2G\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x \partial y}\frac{h^3}{12}dx$$

ist. Auf der gegenüberliegenden Seitenfläche bilden die Schubspannungen τ_{yx} eine Kräftepaar, das sich von dem vorigen um ein Differential unterscheidet und im entgegengesetzten Sinne dreht. Beide zusammen liefern daher ein resultierendes Kräftepaar vom Momente

$$-2G\frac{\partial^3 \zeta_0}{\partial x \partial y^2}\frac{h^3}{12}dx\,dy.$$

Wenn dieser Ausdruck einen positiven Wert annimmt, dreht das resultierende Moment im Sinne der Pfeile, die für τ_{yx} in der bei Abb. 14 nach hinten zu liegenden Seitenfläche einzutragen sind, also entgegengesetzt wie in Abb. 15, d. h. der Momentenvektor geht in der Richtung der positiven Y-Achse.

Ebenso lassen sich die Schubspannungen τ_{xy} auf den beiden anderen Schnittflächen zusammensetzen und man erhält als resultierendes Moment

$$-2G\frac{\partial^3 \zeta_0}{\partial x^2 \partial y}\frac{h^3}{12}dx\,dy$$

das, wenn es einen positiven Wert liefert, im Sinne der Pfeile dreht, die für τ_{xy} auf der in Abb. 14 schraffierten Seitenfläche nach den gewöhnlichen Festsetzungen einzutragen sind; der Momentenvektor geht daher, wenn der Ausdruck positiv ist, im Sinne der negativen X-Achse.

Nun bleiben noch die Schubspannungskomponenten τ_{yz} und τ_{xz}. Auf der in Abb. 15 herausgezeichneten Seitenfläche

lassen sie sich zu einer durch den Mittelpunkt dieser Seitenfläche gehenden Resultierenden zusammensetzen, die zur Abkürzung mit V_{yz} bezeichnet werden soll. Unsere Festsetzungen über die Formänderung gestatten nicht, τ_{yz} oder V_{yz} unmittelbar zu berechnen, wie dies vorher mit den anderen Spannungskomponenten möglich war. Dagegen folgt der Wert von V_{yz} und auch von V_{xz} aus dem Gleichgewichte der an dem Plattenelement angreifenden Kräftepaare gegen Drehen um die X- oder Y-Achse.

Betrachten wir zunächst das Gleichgewicht gegen Drehen um die X-Achse. Der Resultierenden V_{yz} auf der in Abb. 15 herausgezeichneten Seitenfläche, die bei positivem Werte einen nach oben gerichteten Pfeil hat, entspricht auf der gegenüberliegenden Seitenfläche eine Resultierende, die sich von der vorigen um ein Differential unterscheidet und entgegengesetzt gerichtet ist. Bei der Feststellung des Gleichgewichts gegen Drehen kommt es auf den unendlich kleinen Unterschied zwischen beiden Resultierenden nicht an; dagegen liefern beide ein Kräftepaar vom Momente $V_{yz}dy$. Wenn V_{yz} positiv ist, geht der Momentenvektor dieses Kräftepaares im Sinne der positiven X-Achse. Die anderen um die X-Achse drehenden Kräftepaare waren vorher schon festgestellt und die Bedingung, daß die Summe aller Momentenvektoren Null sein muß, liefert die Gleichung

$$\frac{mE}{m^2-1}\left(m\frac{\partial^3\zeta_0}{\partial y^3}+\frac{\partial^3\zeta_0}{\partial x^2\partial y}\right)\frac{h^3}{12}dx\,dy+2G\frac{\partial^3\zeta_0}{\partial x^2\partial y}\frac{h^3}{12}dx\,dy+V_{yz}dy=0.$$

Hieraus berechnet sich V_{yz}, wenn man noch beachtet, daß

$$G=\frac{mE}{2(m+1)}$$

gesetzt werden kann, zu

$$V_{yz}=-\frac{m^2E}{m^2-1}\frac{h^3}{12}\left(\frac{\partial^3\zeta_0}{\partial y^3}+\frac{\partial^3\zeta_0}{\partial x^2\partial y}\right)dx. \qquad (104)$$

In derselben Weise findet man aus dem Gleichgewichte gegen Drehen um die Y-Achse

$$V_{xz} = -\frac{m^2 E}{m^2-1}\frac{h^3}{12}\left(\frac{\partial^3 \zeta_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \zeta_0}{\partial x \partial y^2}\right) dy. \tag{105}$$

Jetzt betrachten wir noch das Gleichgewicht des Plattenelementes gegen Verschieben in der Richtung der Z-Achse. Hierbei kommt es einerseits auf die Unterschiede der Werte von V_{yz} und V_{xz} auf den gegenüberliegenden Seitenflächen, andererseits auf die Last an, die auf das Plattenelement entfällt. Bezeichnet man diese unmittelbar als Funktion von x und y gegebene Belastung, auf die Flächeneinheit bezogen mit p, so lautet die Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{\partial V_{yz}}{\partial y} dy + \frac{\partial V_{xz}}{\partial x} dx + p\, dx\, dy = 0,$$

woraus man durch Einsetzen aus den Gleichungen (104) und (105)

$$\frac{m^2 E}{m^2-1}\frac{h^3}{12}\left(\frac{\partial^4 \zeta_0}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \zeta_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta_0}{\partial y^4}\right) = p \tag{106}$$

erhält. Hiermit ist das gesteckte Ziel erreicht; Gl. (106) ist die Biegungsgleichung der Platte, von deren Integration mit Berücksichtigung der vorgeschriebenen Randbedingungen die Beantwortung aller Fragen abhängt, die sich auf den Formänderungs- und Spannungszustand der Platte beziehen.

Setzt man in Gl. (106) nachträglich $p = 0$, so gelangt man wieder auf die schon früher in § 7 auf Grund einer viel einfacheren Betrachtung abgeleitete Biegungsgleichung (45) der nur durch Kräftepaare am Rande belasteten Platte zurück. — Übrigens ist die hier durchgeführte eingehendere Betrachtung des Zusammenhanges, der zwischen dem Spannungszustande und dem durch die Veränderliche ζ_0 beschriebenen Formänderungszustande besteht, auch für die Verwertung der Gleichung (45) für den Fall $p = 0$ nicht zu entbehren, insofern sich die Randbedingungen auf äußere Kräfte beziehen, die dort angebracht sind. Denn hier hat sich erst ergeben, wie sich die in irgend einer Schnittfläche, die auch zur Randfläche gehören kann, übertragenen Kräfte und Kräftepaare in

der Veränderlichen ζ_0 ausdrücken lassen. Erst hierdurch wird die Verwertung der Grenzbedingungen auch in dem einfacheren Falle $p = 0$ ermöglicht.

§ 18. Lösung der Biegungsgleichung für die elliptische Platte.

Eine der einfachsten Anwendungen, die man von der vorhergehenden Theorie zu machen versteht, bezieht sich auf die am Rande eingespannte elliptische Platte, die einer gleichförmig über die ganze Fläche verteilten Belastung ausgesetzt ist, also etwa einem Flüssigkeitsdrucke zu widerstehen hat. Bezeichnet man nämlich die Halbachsen der Ellipse mit a und b und legt die Koordinatenachsen in die Hauptrichtungen der Ellipse, so daß die Gleichung des Plattenumfanges

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{107}$$

lautet, so ergibt sich als die zugleich allen Randbedingungen genügende Lösung der Biegungsgleichung (106)

$$\zeta_0 = c\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)^2, \tag{108}$$

falls man unter c eine Konstante versteht, die durch Einsetzen dieses Ausdrucks in Gl. (106) erst noch näher zu ermitteln ist.

Um den Beweis für diese Behauptung zu erbringen, schreibe ich zunächst die folgenden Differentialquotienten von ζ_0 an, die sich aus Gl. (108) ergeben:

$$\frac{\partial \zeta_0}{\partial x} = \frac{4cx}{a^2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right); \quad \frac{\partial \zeta_0}{\partial y} = \frac{4cy}{b^2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)$$

$$\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} = \frac{8cx^2}{a^4} + \frac{4c}{a^2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)$$

$$\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} = \frac{8cy^2}{b^4} + \frac{4c}{b^2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)$$

$$\frac{\partial^4 \zeta_0}{\partial x^4} = \frac{24c}{a^4}; \quad \frac{\partial^4 \zeta_0}{\partial y^4} = \frac{24c}{b^4}; \quad \frac{\partial^4 \zeta_0}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{8c}{a^2b^2}.$$

Setzt man die vierten Differentialquotienten in Gl. (106) ein, so geht sie über in

$$\frac{m^2 E}{m^2 - 1}\,\frac{h^3}{12}\left(\frac{24}{a^4} + \frac{16}{a^2 b^2} + \frac{24}{b^4}\right) c = p\,.$$

Hiernach ist die Gleichung für ein konstantes p in der Tat erfüllt, wenn man

$$c = p \cdot \frac{m^2 - 1}{m^2 E h^3 \left(\frac{2}{a^4} + \frac{4}{3 a^2 b^2} + \frac{2}{b^4}\right)} \tag{109}$$

setzt. Nach Gl. (107) wird ferner überall am Rande

$$\zeta_0 = 0\,, \quad \frac{\partial \zeta_0}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial \zeta_0}{\partial y} = 0\,,$$

womit ausgesprochen ist, daß die am Umfange liegenden Punkte der elastischen Fläche überall in der XY-Ebene bleiben und daß diese Ebene die elastische Fläche in diesen Punkten überall berührt, d. h. daß die Platte am Rande eingespannt ist. Hiermit ist die Behauptung bewiesen.

Die Konstante c gibt, wie aus Gl. (108) hervorgeht, zugleich den Biegungspfeil an, um den sich die Platte unter der angegebenen Belastung in der Mitte (für $x = 0$ und $y = 0$) einsenkt. Bezeichnet man mit α irgend einen echten Bruch, so entspricht die Gleichung

$$\frac{x^2}{(a\alpha)^2} + \frac{y^2}{(b\alpha)^2} = 1$$

einer Ellipse, die der den Umfang bildenden ähnlich ist und für alle Punkte, die auf ihr gelegen sind, wird nach Gl. (108)

$$\zeta_0 = c(\alpha^2 - 1)^2$$

d. h. konstant. Die elastische Fläche wird daher durch horizontale Ebenen nach ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsen geschnitten. Hieraus geht auch hervor, daß die größten irgendwo vorkommenden Dehnungen und daher auch die größten Spannungen an den Hauptachsen der Ellipse auftreten müssen. Es genügt daher, wenn wir den Spannungszustand längs dieser Hauptachsen untersuchen.

Für die auf der X-Achse liegenden Punkte ist $y = 0$, also

$$\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} = \frac{12 c x^2}{a^4} - \frac{4c}{a^2}; \quad \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} = \frac{4 c x^2}{a^2 b^2} - \frac{4c}{b^2}$$

und daher nach den Gleichungen (102)

$$\sigma_x = -\frac{mE}{m^2-1} \cdot \frac{4cz}{a^2 b^2} \left\{ \frac{x^2}{a^2} (3mb^2 + a^2) - (mb^2 + a^2) \right\}$$

$$\sigma_y = -\frac{mE}{m^2-1} \cdot \frac{4cz}{a^2 b^2} \left\{ \frac{x^2}{a^2} (3b^2 + ma^2) - (b^2 + ma^2) \right\}.$$

Hierin ist nachträglich noch der Wert von c aus Gl. (109) und für z, um die größte Spannung an der betreffenden Stelle zu erhalten, $\frac{h}{2}$ einzusetzen. Insbesondere erhält man, wenn der Faktor vor der Klammer in den vorhergehenden Formeln zur Abkürzung mit K bezeichnet wird, für

Plattenmitte: $\sigma_x = K(mb^2 + a^2)$; $\sigma_y = K(b^2 + ma^2)$
Plattenrand $(x = a)$: $\sigma_x = -K \cdot 2mb^2$; $\sigma_y = -K \cdot 2b^2$.

Um die größte in der Platte vorkommende Spannung zu erhalten, wollen wir voraussetzen, daß b in den vorhergehenden Formeln die größere der beiden Halbachsen bedeute. Dann nimmt σ_x am Plattenrande den größten überhaupt vorkommenden Spannungswert an und zwar erhält man, wenn man jetzt noch den Wert von K berechnet und einsetzt, vom Vorzeichen abgesehen,

$$\sigma_{\max} = \frac{4p}{h^2 \left(\frac{2}{a^2} + \frac{4}{3b^2} + \frac{2a^2}{b^4} \right)}. \tag{110}$$

Auch die reduzierte Spannung ließe sich an dieser meist beanspruchten Stelle leicht berechnen; doch soll davon abgesehen werden, weil nach der Mohrschen Theorie der Bruchgefahr wegen des gleichen Vorzeichens von σ_x und σ_y die Beanspruchung unmittelbar durch $\sigma_{\max}$ ausgedrückt wird. — Für $b = a$, also für die kreisförmige Platte geht Gl. (110) über in

$$\sigma_{\max} = \frac{3}{4} p \frac{a^2}{h^2}.$$

Man kann noch die Frage aufwerfen, wie sich der Auflagerdruck längs des Umfangs verteilt. Grenzt man das in Abb. 16 durch Schraffierung hervorgehobene Plattenelement ab, so ist der in ds übertragene Auflagerdruck gleich der Summe der in den Seiten dx und dy übertragenen Scherkräfte V_{yz} und V_{xz}, die sich aus den Gleichungen (104) und (105) entnehmen lassen. Aus der Ellipsengleichung hat man

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}$$

oder

$$dy = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}dx$$

Abb. 16.

und für den in ds übertragenen Auflagerdruck Vds erhält man

$$Vds = \frac{m^2 E}{m^2 - 1}\frac{h^3}{12}dx\left\{\frac{\partial^3 \zeta_0}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \zeta_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}\left(\frac{\partial^3 \zeta_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \zeta_0}{\partial x^2 \partial y}\right)\right\}.$$

Unter V ist hiernach der auf die Längeneinheit des Plattenumfangs an der betreffenden Stelle übertragene Auflagerdruck zu verstehen. Berechnet man die Differentialquotienten und drückt auch ds in dx aus, so erhält man

$$V = \frac{m^2 E}{m^2 - 1}\frac{h^3}{12} \cdot \frac{8c}{\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}}\left\{\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{3b^2}{a^2} + 1\right) + \frac{y^2}{b^2}\left(\frac{3a^2}{b^2} + 1\right)\right\}. \quad (111)$$

Hiernach kann der Auflagerdruck für jeden Punkt des Umfangs angegeben werden.

Anmerkung. Verhältnismäßig leicht kann man eine Anzahl anderer Lösungen, sowohl für die elliptische, als auch für die rechteckige Platte finden, indem man zunächst ζ_0 nur so wählt, daß die Grenzbedingungen befriedigt werden und hierauf Gl. (106) dazu benutzt, um die Lastverteilung (nämlich p als Funktion von

x und y) zu ermitteln, für die diese Lösung gilt. Bei einer frei aufliegenden Platte muß natürlich ζ_0 so bestimmt werden, daß am Umfange weder Normalspannungen noch Schubspannungen in der XY-Ebene übertragen werden. Für die rechteckige Platte läßt sich ζ_0 bei beliebig gegebener Belastung durch eine doppelt unendliche Reihe darstellen, mit der aber praktisch nicht viel anzufangen ist.

§ 19. Die Plattengleichung in Polarkoordinaten.

Der Übergang von den rechtwinkligen zu den Polarkoordinaten kann hier genau in derselben Weise bewirkt werden, wie in § 11 für die Spannungsfunktion. Gerade so wie damals Gl. (67) abgeleitet wurde, erhalten wir hier als Biegungsgleichung der Platte aus Gl. (106)

$$\frac{m^2 E}{m^2-1}\,\frac{h^3}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 \zeta_0 = p\,. \qquad (112)$$

Hierbei ist p als eine Funktion von r und φ zu betrachten. Bei einer kreisförmigen Platte mit symmetrischer Belastung sind dagegen p und ζ_0 unabhängig von φ und Gleichung (112) vereinfacht sich zu

$$\frac{m^2 E}{m^2-1}\,\frac{h^3}{12}\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2\zeta_0}{dr^2}+\frac{1}{r}\,\frac{d\zeta_0}{dr}\right) = p\,. \qquad (113)$$

Setzt man hier zuerst $p = 0$, so kann für ζ_0 ohne weiteres die in Gl. (69) für F gegebene allgemeine Lösung genommen werden. Die allgemeine Lösung von Gl. (113) findet man daraus, indem man noch ein partikuläres Integral dieser Gleichung hinzufügt, das leicht gefunden werden kann. Ist z. B. p eine Konstante, so ist die allgemeine Lösung von (113)

$$\zeta_0 = c_0 + c_1 \lg r + c_2 r^2 + c_3 r^2 \lg r + \frac{3(m^2-1)}{16 m^2 E h^3} p r^4\,. \qquad (114)$$

Wenn die Platte nicht voll, sondern von zwei konzentrischen Kreisen begrenzt ist, von denen sowohl der innere als der äußere als Auflagerkreis dienen kann, ist das Glied $c_1 \lg r$ beizubehalten; bei der vollen Platte ist es dagegen zu streichen, weil ζ_0 für $r = 0$ nicht unendlich werden kann.

Auf die Bestimmung der Integrationskonstanten aus den Grenzbedingungen kann hier verzichtet werden, weil man damit nur wieder auf die schon im dritten Bande abgeleiteten Formeln geführt würde.

Setzt man in Gl. (114) an Stelle des letzten Gliedes

$$Cr^{n+4},$$

worin n irgend eine positive oder negative Zahl bedeutet, so bezieht sich die Lösung auf eine Lastverteilung, die proportional mit r^n ist.

Für eine Einzellast, die in der Mitte angreift, nimmt man die Lösung in Gl. (114) für $p = 0$ und setzt die Konstante c_3

$$c_3 = \frac{3P}{2\pi h^3} \cdot \frac{m^2 - 1}{m^2 E}. \tag{115}$$

Denkt man sich nämlich die Last P auf einen Kreis vom Halbmesser a verteilt, der klein ist von derselben Ordnung wie die Plattendicke h, so muß

$$P = 2\pi \int_0^a pr\,dr$$

sein. Dabei kann p aus Gl. (113) entnommen werden und zwar wird nach dieser Gleichung

$$pr = \frac{m^2 E}{m^2 - 1} \frac{h^3}{12} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr}\right) \left(\frac{d^2 \zeta_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\zeta_0}{dr}\right)$$

und hiernach

$$P = 2\pi \frac{m^2 E}{m^2 - 1} \frac{h^3}{12} \left[r \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 \zeta_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\zeta_0}{dr}\right)\right]_0^a.$$

Für die untere Grenze verschwindet das Integral und für die obere Grenze $r = a$ kann man die Differentialquotienten von ζ_0 wegen des stetigen Übergangs an der Grenze nach Gl. (114) (mit $p = 0$) berechnen. Führt man dies aus, so erhält man

$$r \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 \zeta_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\zeta_0}{dr}\right) = 4 c_3$$

also unabhängig von r. Auf die Größe von a kommt es daher nicht an und die Auflösung der vorhergehenden Gleichung

nach c_3 liefert den in Gl. (115) angegebenen Wert. — Zugleich erkennt man hieraus, daß die Konstante c_3 in Gl. (114) gleich Null zu setzen ist, wenn die Platte nur eine gleichförmig verteilte Belastung und nicht daneben noch eine Einzellast in der Mitte aufzunehmen hat. Im übrigen stehen diese Ergebnisse in Übereinstimmung mit den schon im dritten Bande abgeleiteten und dort näher besprochenen.

§ 20. Die Platte auf nachgiebiger Unterlage.

Im sechsten Abschnitte des dritten Bandes wurden die Stäbe auf nachgiebiger Unterlage behandelt. Daran schließt sich die hier durchzuführende Betrachtung unmittelbar an, d. h. wir setzen wie dort den in einem Flächenelemente der Platte übertragenen Auflagerdruck proportional mit der Einsenkung, die die Platte an dieser Stelle erfahren hat, oder

$$q = k\zeta_0 \tag{116}$$

wenn jetzt q den auf die Flächeneinheit bezogenen Auflagerdruck und k eine „Bettungsziffer“ bedeutet.

Hierbei ist zunächst daran gedacht, daß die Platte auf dem Erdboden oder auf einem anderen festen Untergrunde aufgelagert ist, für den der vorstehende Ansatz als hinlänglich genau richtig betrachtet werden kann. Aber auch wenn die Platte wie ein Floß auf dem Wasser schwimmt, gilt der Ansatz und zwar ist er in diesem Falle streng richtig. Der durch die Formänderung hervorgerufene „Auflagerdruck“ q besteht nämlich in diesem Falle aus der durch die Einsenkung um ζ_0 hervorgerufenen Vermehrung des hydrostatischen Auftriebs. Die „Bettungsziffer“ q ist in diesem Falle gleich dem auf die Volumeneinheit bezogenen Gewichte des Wassers.

Die Differentialgleichung für die Platte auf nachgiebiger Unterlage ergibt sich hiernach aus Gl. (106) durch Beifügung des Gliedes aus Gl. (116) zu

$$\frac{m^2 E}{m^2-1}\,\frac{h^3}{12}\left(\frac{\partial^4 \zeta_0}{\partial y^4} + 2\,\frac{\partial^4 \zeta_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta_0}{\partial x^4}\right) = p - k\zeta_0 . \tag{117}$$

Eine allgemeine Lösung dieser Gleichung ist aber, wenn keine besonderen Vereinfachungen vorliegen, als ausgeschlossen zu betrachten.

Wir begrenzen daher die Aufgabe dahin, daß es sich um eine kreisförmige Platte handeln soll, die nur in der Mitte eine Last P aufzunehmen hat, während sie sonst unbelastet ist, so daß, abgesehen von einer kleinen Stelle in der Mitte, p in Gl. (117) gleich Null zu setzen ist. Der vollkommenen Symmetrie wegen können wir ferner die Gleichung in Polarkoordinaten nach dem Muster von Gl. (113) in der Form

$$\frac{m^2 E}{m^2-1}\frac{h^3}{12}\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2\zeta_0}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\zeta_0}{dr}\right)+k\zeta_0=0 \qquad (118)$$

anschreiben. Hierzu muß noch bemerkt werden, daß es bei einer sehr großen Platte nicht mehr darauf ankommt, wie die Platte am Umriß begrenzt ist, da die Formänderung sich, wie von vornherein einzusehen ist, im wesentlichen auf die Nachbarschaft der belasteten Stelle beschränken muß. Man kann daher auf eine hinreichend große Platte, die irgendwo eine Einzellast trägt, Gl. (118) ebenfalls anwenden, indem man dabei die Platte als kreisförmig von unendlich großem Halbmesser ansieht. Wie groß die Platte tatsächlich sein muß, damit diese Annahme als zulässig gelten kann, wird sich nachher noch ergeben. Treten bei einer solchen großen Platte mehrere Lasten zugleich auf, so erhält man den gesamten Formänderungs- und Spannungszustand durch Übereinanderlagerung der den Einzellasten entsprechenden. Mit der Lösung für eine Einzellast wird daher die Aufgabe zugleich auch für eine beliebig zusammengesetzte Belastung gelöst.

In der zuletzt besprochenen Form stellt sich die Aufgabe ein, wenn man sich die Frage vorlegt, wie dick eine Eisdecke auf einem Teiche sein muß, damit sie ohne Gefahr betreten werden kann. Vorausgesetzt wird dabei, daß die Elastizitätskonstanten und die Zugfestigkeit des Eises (die kleiner ist als die Druckfestigkeit) gegeben sind. H. Hertz, der große Physiker, hat diese Aufgabe in seiner Abhandlung „Über das

Gleichgewicht schwimmender elastischer Platten“ vollständig gelöst*). Wer nicht schon vorher Studien über die von Bessel eingeführten und häufig auch nach ihm benannten „Zylinderfunktionen“ gemacht hat, kann aber die Abhandlung von Hertz nicht verstehen. Von meinen Lesern kann ich natürlich nicht voraussetzen, daß sie sich mit diesen, auch den Mathematikern von Beruf häufig nur wenig geläufigen Spezialstudien, die freilich in verschiedenen Gebieten der theoretischen Physik recht nützliche Verwendung finden, schon näher befaßt hätten. Ich muß daher meine Darstellung so einzurichten suchen, daß sie auch ohne solche Vorkenntnisse ohne weiteres verständlich bleibt, obschon dies natürlich nur auf Kosten der Strenge und Ausführlichkeit geschehen kann. Wer darin weiter kommen will, wird sich daher schließlich doch noch zu einem Studium der Besselschen Funktionen entschließen müssen; für die meisten Zwecke dürfte aber das ausreichen, was ich hier darüber auseinandersetzen werde.

Der kürzeren Ausdrucksweise wegen sollen einige Abkürzungen eingeführt werden. Zunächst sei der Operator E^2 eingeführt zur Bezeichnung für die Operation

$$\mathsf{E}^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}, \tag{119}$$

so daß hiermit Gl. (118) kürzer in der Form

$$\frac{m^2 E}{m^2 - 1}\frac{h^3}{12}\mathsf{E}^4 \zeta_0 + k\zeta_0 = 0 \tag{120}$$

geschrieben werden kann. Die in dieser Gleichung vorkommenden Konstanten m, E, h und k lassen sich ferner zu einer einzigen Konstanten zusammenfassen, indem man

$$\frac{m^2 E}{m^2 - 1}\frac{h^3}{12k} = l^4 \tag{121}$$

setzt. Dabei ist l, wie aus der Betrachtung der Dimensionen hervorgeht (nämlich $E = \text{kg cm}^{-2}$ und $k = \text{kg cm}^{-3}$), eine

*) H. Hertz, Wiedemanns Annalen 22, S. 449, 1884 oder auch Gesammelte Werke, Bd. I, S. 288, 1895.

Länge, die nur von dem Material und der Dicke der Platte abhängt. Eine Platte, die in dem früher besprochenen Sinne als sehr groß angesehen werden soll, muß Abmessungen haben, die mindestens ein Mehrfaches von l ausmachen. Mit der Einführung von l lautet Gl. (120)

$$l^4 \mathsf{E}^4 \zeta_0 + \zeta_0 = 0. \tag{122}$$

Endlich wird für die weitere Behandlung noch eine erhebliche Vereinfachung erzielt, indem man an Stelle der Veränderlichen r und ζ_0, die Längen bedeuten, neue Veränderliche x und z einführt, die nur noch absolute Zahlen sind, indem man

$$\frac{\zeta_0}{l} = z \quad \text{und} \quad \frac{r}{l} = x \tag{123}$$

setzt. Dies kommt übrigens auf dasselbe hinaus, als wenn in Gl. (122) die Strecken r und ζ_0 in einer Längeneinheit $l = 1$ ausgemessen werden. Hiermit wird schließlich die Plattengleichung auf die einfache Form

$$\mathsf{E}^4 z + z = 0 \tag{124}$$

gebracht. In ausführlicherer Schreibweise ist dies übrigens gleichbedeutend mit

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{1}{dx}\right)\left(\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dz}{dx}\right) + z = 0$$

oder auch, wenn man die Differentiationen vollständig ausführt, mit

$$\frac{d^4 z}{dx^4} + \frac{2}{x}\frac{d^3 z}{dx^3} - \frac{1}{x^2}\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{1}{x^3}\frac{dz}{dx} + z = 0. \tag{125}$$

Diese Differentialgleichung ist linear und ihre vollständige Lösung setzt sich aus vier, mit den willkürlichen Integrationskonstanten behafteten Gliedern zusammen, von denen jedes eine partikuläre Lösung angibt. Sie ist also von der Form

$$z = c_1 F_1(x) + c_2 F_2(x) + c_3 F_3(x) + c_4 F_4(x). \tag{126}$$

Die beiden ersten partikulären Lösungen lassen sich mit Hülfe von Potenzreihen darstellen. Um dies einzusehen, führe man zunächst die Operation E^4 an einer Potenz $a_n x^n$ aus. Man

findet leicht durch Ausführung der Differentiationen und Zusammenziehen der Glieder

$$\mathsf{E}^4 a_n x^n = n^2(n-2)^2 a_n x^{n-4}. \tag{127}$$

Damit Gl. (124) durch eine Potenzreihe befriedigt werde, muß daher jedem Gliede $a_n x^n$ ein Glied $a_{n-4} x^{n-4}$ gegenüberstehen, so daß

$$a_{n-4} x^{n-4} + n^2(n-2)^2 a_n x^{n-4} = 0$$

wird. Hieraus erkennt man das Gesetz, nach dem die Koeffizienten der Potenzreihen fortschreiten müssen, nämlich

$$a_n = -\frac{a_{n-4}}{n^2(n-2)^2}.$$

Beachtet man ferner, daß

$$\mathsf{E}^4 a_0 = 0 \quad \text{und} \quad \mathsf{E}^4 a_2 x^2 = 0$$

ist, wie aus der Ausführung der Differentiationen hervorgeht, so erhält man die folgenden beiden partikulären Integrale der Differentialgleichung

$$\left.\begin{aligned} F_1(x) &= 1 - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \frac{x^{12}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2 \cdot 12^2} + \cdots \\ F_2(x) &= x^2 - \frac{x^6}{4^2 \cdot 6^2} + \frac{x^{10}}{4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} - \frac{x^{14}}{4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2 \cdot 12^2 \cdot 14^2} + \cdots \end{aligned}\right\}. \tag{128}$$

Da sich die Formänderung, die mit Hülfe dieser Integrale dargestellt werden soll, offenbar im wesentlichen in der Nähe der belasteten Stelle vollzieht, wo r nur einen kleinen Bruchteil von l ausmacht, so daß x ein ziemlich kleiner echter Bruch ist, konvergieren diese Reihen sehr schnell, so daß man sich später bei der Ausrechnung mit der Beibehaltung von wenigen Gliedern begnügen darf.

Zu einer dritten Lösung der Gleichung gelangt man, indem man setzt

$$F_3(x) = F_1(x) \lg x + X_3, \tag{129}$$

wobei X_3 eine Funktion von x ist, die sich wiederum durch eine Potenzreihe darstellen läßt. Um dies zu beweisen, führe man an $F_3(x)$ die Differentiationen aus, die zur Operation E^4

gehören; man findet dann nach einigen Rechnungen zunächst

$$\mathsf{E}^4(F_1(x)\lg x) = \frac{4}{x}\frac{d^3F_1(x)}{dx^3} + \lg x\,\mathsf{E}^4F_1(x)$$

und im ganzen erhält man daher beim Einsetzen von $F_3(x)$ in Gl. (124)

$$\frac{4}{x}\frac{d^3F_1(x)}{dx^3} + \lg x\,\mathsf{E}^4F_1(x) + \mathsf{E}^4X_3 + \lg x\,F_1(x) + X_3 = 0.$$

Nun war aber $F_1(x)$ bereits eine Lösung der Differentialgleichung (124) und hiernach heben sich in der letzten Gleichung die mit $\lg x$ behafteten Gliedern gegeneinander fort. Man behält daher für X_3 die Gleichung

$$\mathsf{E}^4X_3 + X_3 + \frac{4}{x}\frac{d^3F_1(x)}{dx^3} = 0. \tag{130}$$

Entnimmt man den dritten Differentialquotienten von F_1 aus Gl. (128), so wird dies

$$\mathsf{E}^4X_3 + X_3 + 4\left\{-\frac{2\cdot3\cdot4}{2^2\cdot4^2} + \frac{6\cdot7\cdot8x^4}{2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdot8^2} - \frac{10\cdot11\cdot12x^8}{2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdot8^2\cdot10^2\cdot12^2} + \cdots\right\} = 0. \tag{131}$$

Hat man irgend eine Lösung dieser Differentialgleichung gefunden, so darf man ihr natürlich auch jede beliebige Lösung von

$$\mathsf{E}^4X_3 + X_3 = 0,$$

d. h. von Gleichung (124) hinzufügen. Diese weiteren Lösungen sind aber bei unserem Verfahren schon berücksichtigt und es handelt sich nur noch um eine partikuläre Lösung, die mit den früheren nichts zu tun hat. Man erhält sie, indem man

$$X_3 = b_4x^4 + b_8x^8 + b_{12}x^{12} + \cdots \tag{132}$$

setzt und die Koeffizienten b so bestimmt, daß Gl. (131) befriedigt wird. Da nach Gl. (127)

$$\mathsf{E}^4b_4x^4 = 4^2\cdot2^2b_4,$$

hat man für b_4 die Gleichung

$$2^2 \cdot 4^2 b_4 - 4 \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2^2 \cdot 4^2} = 0,$$

woraus für b_4

$$b_4 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4^2}{2^4 \cdot 4^4} = \frac{3}{128}$$

folgt. Ebenso findet man, indem man die Summe der mit x^4 behafteten Glieder in Gl. (131) gleich Null setzt,

$$b_8 = -\frac{25}{1\,769\,472}.$$

Allgemein wird, wenn b_n irgend einen der folgenden Koeffizienten bedeutet, und b_{n-4} dem Absolutbetrage nach eingesetzt wird,

$$b_n = \pm \frac{1}{n^2(n-2)^2}\left(b_{n-4} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \ldots n^2}\right). \tag{133}$$

Die Vorzeichen sind abwechselnd positiv und negativ. Aus dieser Darstellung erkennt man, daß auch die Reihe (132), wenn x nicht gerade sehr groß ist, äußerst schnell konvergiert. In der Regel wird es daher genügen, die Reihe mit dem ersten oder zweiten Gliede abzubrechen, also

$$F_3(x) = F_1(x) \cdot \lg x + \frac{3}{128} x^4 - \frac{25}{1\,769\,472} x^8 + \cdots \tag{134}$$

zu setzen. Für $x = 0$ wird übrigens $F_1(x) = 1$ und daher $F_3(x)$ unendlich groß von der Ordnung $\lg(0)$; daher ist für die Anwendung, die wir von der Lösung der Differentialgleichung hier zu machen beabsichtigen, nachträglich die Konstante c_3 in Gl. (126) gleich Null zu setzen, so daß $F_3(x)$ ganz wegfällt.

Die vierte partikuläre Lösung $F_4(x)$ finden wir in derselben Weise wie $F_3(x)$, indem wir entsprechend Gl. (129) jetzt

$$F_4(x) = F_2(x) \lg x + X_4 \tag{135}$$

setzen. Die weiteren Rechnungen, die sich an Gl. (129) anschlossen, spielen sich hier in derselben Weise ab. An Stelle von Gl (130) tritt

$$\mathsf{E}^4 X_4 + X_4 + \frac{4}{x}\frac{d^3 F_2(x)}{dx^3} = 0, \tag{136}$$

woraus man durch Einsetzen von $F_2(x)$ aus Gl. (128)

$$\mathrm{E}^4 X_4 + X_4 + 4\left\{-\frac{4\cdot 5\cdot 6x^2}{4^2\cdot 6^2} + \frac{8\cdot 9\cdot 10x^6}{4^2\cdot 6^2\cdot 8^2\cdot 10^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{12\cdot 13\cdot 14x^{10}}{4^2\cdot 6^2\cdot 8^2\cdot 10^2\cdot 12^2\cdot 14^2} + \cdots\right\} = 0 \qquad (137)$$

erhält. Man genügt dieser Gleichung durch

$$X_4 = b_6 x^6 + b_{10}x^{10} + b_{14}x^{14} + \cdots, \qquad (138)$$

falls man die Koeffizienten b passend bestimmt; und zwar erhält man durch Einsetzen in Gl. (137)

$$b_6 = 4\cdot\frac{4\cdot 5\cdot 6}{4^4\cdot 6^4} = \frac{5}{3456} = 1{,}447\cdot 10^{-3}$$
$$b_{10} = -\frac{1054}{4\,423\,680\,000} = -2{,}382\cdot 10^{-7}.$$

Jeden der folgenden Koeffizienten findet man aus den vorhergehenden, wenn man nur die Absolutbeträge einsetzt, nach der Formel

$$b_n = \pm\frac{1}{n^2(n-2)^2}\left(b_{n-4} + \frac{n(n-1)(n-2)}{4^2\cdot 6^2\cdots n^2}\right) \qquad (139)$$

und die Vorzeichen sind abwechselnd positiv und negativ. Auch die Reihe für X_4 konvergiert daher sehr schnell, wenn x nicht allzugroße Werte annimmt.

Im ganzen wird hiernach für z, wenn man den Koeffizienten c_3 in Gl. (126) aus einem vorher schon angegebenen Grunde gleich Null setzt,

$$\left.\begin{aligned} z = c_1&\left(1 - \frac{x^4}{2^2\cdot 4^2} + \frac{x^8}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2} - \cdots\right)\\ &+ c_2\left(x^2 - \frac{x^6}{4^2\cdot 6^2} + \frac{x^{10}}{4^2\cdot 6^2\cdot 8^2\cdot 10^2} - \cdots\right)\\ + c_4&\left\{\lg x\cdot\left[x^2 - \frac{x^6}{4^2\cdot 6^2} + \frac{x^{10}}{4^2\cdot 6^2\cdot 8^2\cdot 10^2} - \cdots\right]\right.\\ &\left. + 1{,}447\cdot 10^{-3}x^6 - 2{,}382\cdot 10^{-7}x^{10} + \cdots\right\} \end{aligned}\right\} \qquad (140)$$

gefunden. Es bleibt jetzt nur noch übrig, die drei stehengebliebenen Integrationskonstanten $c_1 c_2 c_4$ den Grenzbedingungen gemäß zu bestimmen.

§ 21. Anpassung der Lösung an die Grenzbedingungen.

Hier sind die beiden Fälle zu unterscheiden, ob der Halbmesser der Platte, den wir mit R bezeichnen wollen, endlich oder ob er so groß ist, daß er als unendlich groß angesehen werden kann. Wir betrachten zunächst den ersten Fall. Die Grenzbedingung am Rande besteht darin, daß sowohl die Normalspannung σ_r als die Schubspannung für $r = R$ verschwinden muß.

Wir stellen zunächst σ_r als Funktion von ζ_0 dar. Dazu gehen wir aus von den Gleichungen (102) für σ_x und σ_y, die nur in Polarkoordinaten umgeschrieben zu werden brauchen, was genau nach der schon in § 11 gegebenen Anleitung geschehen kann. Man erhält dann

$$\sigma_r = -\frac{mE}{m^2-1} z\left(m\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\zeta_0}{\partial r}\right).$$

Der Buchstabe z ist hier in anderer Bedeutung gebraucht, als im vorhergehenden Paragraphen; er bezeichnet hier den Abstand der betreffenden Stelle von der Mittelfläche der Platte. Die vorstehende Gleichung gilt noch allgemein. In unserem Falle ist ζ_0 unabhängig von φ und man hat daher einfacher

$$\sigma_r = -\frac{mE}{m^2-1} z\left(m\frac{d^2\zeta_0}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\zeta_0}{dr}\right). \tag{141}$$

Die eine Randbedingung läßt sich daher in der Gleichung

$$\left(m\frac{d^2\zeta_0}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\zeta_0}{dr}\right)_{r=R} = 0$$

aussprechen, die man durch Einführung der Variabeln x und z nach Gl. (123) des vorigen Paragraphen auch in die Form

$$\left(m\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dz}{dx}\right)_{x=\frac{R}{l}} = 0 \tag{142}$$

bringen kann.

Um einen Ausdruck für die Schubspannung V_{rz} zu gewinnen, die in einem irgendwo senkrecht zu r geführten Schnitte von der Länge ds und zwar in der Richtung der Z-Achse übertragen wird, können wir auf die Gleichungen

(104) oder (105) zurückgreifen. Legt man die X-Achse in die Richtung des Radius, die Y-Achse in die tangentiale Richtung, so erhält man aus Gl. (105) zunächst

$$V_{rz} = -\frac{m^2 E}{m^2-1}\frac{h^3}{12}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial t^2}\right)\cdot ds,$$

wobei die Differentiationen nach r und t so zu deuten sind, wie dies in § 11 ausführlich besprochen worden war. Führt man nach der dort gegebenen Anleitung den Differentialquotienten nach t aus und beachtet, daß ζ_0 hier unabhängig von φ ist, so erhält man

$$V_{rz} = -\frac{m^2 E}{m^2-1}\frac{h^3}{12}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \zeta_0}{\partial r}\right)ds. \tag{143}$$

Die zweite Randbedingung lautet daher

$$\left[\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2\zeta_0}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\zeta_0}{dr}\right)\right]_{r=R} = 0,$$

wofür man auch unter Einführung der Bezeichnungen des vorigen Paragraphen

$$\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 z}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dz}{dx}\right)\right]_{x=\frac{R}{l}} = \left[\frac{d}{dx}\,\mathsf{E}^2 z\right]_{x=\frac{R}{l}} = 0 \tag{144}$$

schreiben kann.

Endlich bleibt noch, wie schon bei der am Schlusse von § 19 durchgeführten Betrachtung, die Bedingung zu erfüllen, daß die Summe der über einen kreisförmigen Schnitt von dem sehr kleinen Halbmesser $r = a$ verteilten Schubkräfte V_{rz} mit der in der Mitte aufgebrachten Last P im Gleichgewichte stehen muß. Das liefert nach Gl. (143) die Bedingungsgleichung

$$-\frac{m^2 E}{m^2-1}\frac{h^3}{12}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \zeta_0}{\partial r}\right)\right]_{r=a}\cdot 2\pi a + P = 0. \tag{145}$$

Auch diese Gleichung läßt sich durch Einführung der Größen l, z und x auf eine bequemere Form bringen, nämlich

$$-kl^2\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 z}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dz}{dx}\right)\right]_{x=\frac{a}{l}}\cdot 2\pi a + P = 0. \tag{146}$$

Die drei Gleichungen (142), (144) und (146) dienen zur Bestimmung der drei Integrationskonstanten c_1, c_2 und c_4 in Gleichung (140). Um sie zu verwerten, führe man zunächst die Operation E^2_ι an z in Gl. (140) aus. Das macht zwar etwas längere Rechnungen nötig, ist aber sonst nicht schwierig. Man erhält

$$\begin{aligned}\mathsf{E}^2 z = c_1 \left(-\frac{x^2}{2^2} + \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} - \cdots\right) + c_2 \left(4 - \frac{x^4}{4^2} + \frac{x^8}{4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \cdots\right) \\ + c_4 \left\{\lg x \left[4 - \frac{x^4}{4^2} + \frac{x^8}{4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \cdots\right]\right. \\ \left. + 4 + 0{,}031\, x^4 - 1{,}84 \cdot 10^{-5} x^8 + \cdots\right\}.\end{aligned}$$

Differentiiert man dies, wie in Gl. (146) vorgeschrieben, nochmals nach x und setzt hierauf x darin gleich der sehr kleinen Zahl $\frac{a}{l}$, so heben sich alle übrigen Glieder fort bis auf

$$\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dz}{dx}\right)\right]_{x=\frac{a}{l}} = 4 c_4 \frac{l}{a}$$

und indem man dies in Gl. (146) einsetzt, findet man

$$c_4 = \frac{P}{8 \pi k l^3}. \tag{147}$$

Die Konstante c_4 ist daher nur von der Größe der Last P, aber nicht von den Randbedingungen, insbesondere also auch nicht von dem Radius R der Platte abhängig.

Setzt man ferner den Differentialquotienten von $\mathsf{E}^2 z$ in Gl. (144) ein, so geht sie über in

$$\left.\begin{aligned}c_1\left(-\frac{1}{2}\frac{R}{l} + \frac{1}{384}\left(\frac{R}{l}\right)^5 - \cdots\right) + c_2\left(-\frac{1}{4}\left(\frac{R}{l}\right)^3 + \frac{1}{4608}\left(\frac{R}{l}\right)^7 - \cdots\right) \\ + c_4\left\{\lg\frac{R}{l}\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{R}{l}\right)^3 + \frac{1}{4608}\left(\frac{R}{l}\right)^7 - \cdots\right]\right. \\ \left. + 4\frac{l}{R} + 0{,}062\left(\frac{R}{l}\right)^3 - 12{,}0 \cdot 10^{-5}\left(\frac{R}{l}\right)^7 + \cdots\right\} = 0\end{aligned}\right\}. \tag{148}$$

Bei gegebenem R und l lassen sich die in den Klammern stehenden Ausdrücke sofort numerisch berechnen, womit man eine einfache Gleichung ersten Grades zwischen den Inte-

grationskonstanten c_1, c_2 und c_4 erhält. Wenn R nicht gerade so groß ist gegen l, daß die Platte schon als unendlich groß betrachtet werden kann, genügen auch die angeschriebenen Glieder schon vollständig zur numerischen Berechnung.

Aus der Bedingungsgleichung (142) endlich wird, wenn man die Differentialquotienten von z einsetzt:

$$\left.\begin{aligned} m\Big\{ & c_1\left(-\frac{3}{16}\left(\frac{R}{l}\right)^2+\frac{7}{18\,432}\left(\frac{R}{l}\right)^6-\cdots\right) \\ &\qquad + c_2\left(2-\frac{5}{96}\left(\frac{R}{l}\right)^4+\frac{9}{368\,640}\left(\frac{R}{l}\right)^8-\cdots\right) \\ & + c_4\left[\lg\frac{R}{l}\left(2-\frac{5}{96}\left(\frac{R}{l}\right)^4+\frac{9}{368\,640}\left(\frac{R}{l}\right)^8-\cdots\right)\right. \\ &\qquad \left. + 3 + 0{,}0243\left(\frac{R}{l}\right)^4 - 16{,}28\cdot 10^{-6}\left(\frac{R}{l}\right)^8\right]\Big\} \\ & + c_1\left(-\frac{1}{16}\left(\frac{R}{l}\right)^2+\frac{1}{18\,432}\left(\frac{R}{l}\right)^6-\cdots\right) \\ &\qquad + c_2\left(2-\frac{1}{96}\left(\frac{R}{l}\right)^4+\frac{1}{368\,640}\left(\frac{R}{l}\right)^8-\cdots\right) \\ & + c_4\left[\lg\frac{R}{l}\left(2-\frac{1}{96}\left(\frac{R}{l}\right)^4+\frac{1}{368\,640}\left(\frac{R}{l}\right)^8-\cdots\right)\right. \\ &\qquad \left. + 1 + 0{,}00\,696\left(\frac{R}{l}\right)^4 - 2{,}11\cdot 10^{-6}\left(\frac{R}{l}\right)^8+\cdots\right] = 0 \end{aligned}\right\} \cdot (149)$$

Auch hier lassen sich die Koeffizienten der c numerisch leicht berechnen, wenn außer R und l auch noch die Elastizitätskonstante m des Materials gegeben ist. Nachdem c_4 aus Gl. (147) entnommen ist, findet man durch die Auflösung der Gl. (148) und (149) auch c_1 und c_2. Hiermit ist die Formänderung der Platte vollständig bekannt. Um nachher noch die Beanspruchung des Materials, die in der Mitte am größten wird, zu finden, muß man dagegen so verfahren, wie es schon im dritten Bande für eine nur am Umfange unterstützte kreisförmige Platte geschehen ist, d. h. man muß sich die Last P auf einen kleinen Kreis verteilt denken, dessen Halbmesser von der Ordnung der Plattendicke h ist.

Es bleibt nun noch der andere Fall zu besprechen, daß der Halbmesser der Platte als unendlich groß angesehen werden

kann. Dieser ist eigentlich erheblich einfacher, als der vorige. Aber die Reihendarstellung, die wir für die Funktionen F_1 usw. benutzt haben, eignet sich nicht für die Berechnung der Funktionswerte für sehr große x, die gegen unendlich konvergieren. In der Theorie der Besselschen Funktionen wird gezeigt, daß man diese Reihen auch durch bestimmte Integrale ersetzen kann, an denen der Grenzübergang zu $R = \infty$ leicht zu bewirken ist. Davon kann aber hier kein Gebrauch gemacht werden. Man könnte sich dadurch helfen, daß man nach den vorhergehenden Formeln zuerst die Konstanten c_1 und c_2 für den Fall berechnete, daß etwa $R = 3l$ ist, hierauf für $R = 6l$, dann vielleicht für $R = 9l$ usf., nötigenfalls unter Hinzunahme weiterer Glieder für die Reihenentwickelungen. Dann müßte sich herausstellen, daß diese Vergrößerungen des Plattenhalbmessers an den Werten für die Konstanten c_1 und c_2 keine merklichen Änderungen mehr herbeiführen. Das folgt nämlich daraus, daß sich die Formänderung offenbar im wesentlichen nur auf die Nachbarschaft der belasteten Stelle erstrecken kann und bei stark wachsendem R ganz unmerklich werden muß. Ein solches Vorgehen, bei dem eine unmittelbar geschöpfte physikalische Einsicht zur Ergänzung der Rechnungsgrundlagen herangezogen wird, ist um so mehr zulässig, als man ja in der Tat die Rechnung niemals auf den Fall anzuwenden beabsichtigen kann, daß der Plattenhalbmesser wirklich unendlich groß wäre.

Im übrigen begnüge ich mich damit, die Werte der Konstanten c_1 und c_2 für $R = \infty$ ohne den Versuch eines Beweises anzugeben. Nach Hertz, der diese Berechnung vorgenommen hat, wird für die unendlich große Platte

$$c_1 = \pi c_4 \quad \text{und} \quad c_2 = -1{,}1159\, c_4 .$$

Die Konstante c_1 gibt übrigens, wie aus Gl. (140) für $x = 0$ entnommen werden kann, mit l multipliziert die Einsenkung ζ_0 an der Stelle an, auf die das Gewicht aufgebracht wird. Bezeichnet man diese Einsenkung, die übrigens, wie schon aus der physikalischen Betrachtung hervorgeht, größer sein muß

als an jeder anderen Stelle, als den „Biegungspfeil" f, so erhält man für die unendlich große Platte

$$f = \frac{P}{8kl^2}. \tag{150}$$

Zur weiteren Erläuterung lasse ich hier noch ein Zahlenbeispiel folgen. Dem Leser der sich durch die ganze hier gegebene Entwickelung durchgearbeitet hat, empfehle ich aber, außerdem auch noch die angeführte Abhandlung von Hertz selbst durchzusehen, da diese noch mancherlei Einzelheiten bringt, die ich hier übergehen muß.

§ 22. Behandlung eines Beispiels.

Eine Eisenplatte von 25 cm Durchmesser und 2 cm Dicke liegt auf einem Boden, der unter einem Drucke von $\frac{1\ \text{kg}}{\text{cm}^2}$ eine Einsenkung von 0,25 mm erfährt. In der Mitte wird eine Belastung von 2000 kg aufgebracht. Der Elastizitätsmodul des Eisens sei zu $2\,000\,000\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ angenommen. Wie verteilt sich der Druck über die ganze Fläche, wie groß ist die Einsenkung in der Mitte und wie groß ist die Beanspruchung des Materials der Platte?

Vor allem wird man die Länge l nach Gl. (121) berechnen, durch die das physikalische Verhalten der Platte in den Formeln der vorhergehenden Paragraphen ausschließlich gekennzeichnet ist. Nimmt man m zu $3^1/_3$ an, so erhält man, da

$$E = 2\,000\,000\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \quad \text{und} \quad k = \frac{1\ \text{kg cm}^{-2}}{0{,}25\ \text{mm}} = 40\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$$

nach Gl. (121)

$$l = \sqrt[4]{\frac{m^2}{m^2-1}\,\frac{E}{12k}\cdot h^3} = 12{,}7\ \text{cm}.$$

Die letzte Stelle ist übrigens wegen der Unsicherheit, in der man sich über die genaueren Werte der Konstanten m, E und k befinden wird, ganz bedeutungslos. Da nun der Halbmesser der Platte $R = 12{,}5$ cm beträgt, sind wir berechtigt,

in den Formeln des vorigen Paragraphen zur Berechnung der Konstanten c das Verhältnis $\frac{R}{l}$ gleich 1 zu setzen.

Zunächst erhält man nach Gl. (147) mit $l = 12{,}5$ cm

$$c_4 = \frac{P}{8\pi k l^3} = 0{,}00\,102$$

und zwar ist c_4, ebenso wie c_1 und c_2 eine unbenannte Zahl. In den Gleichungen (148) und (149) können die Glieder mit den höheren Potenzen von $\frac{R}{l}$ weggelassen werden, da sie einen Beitrag liefern, der schon zu klein ist, um in Betracht zu kommen; außerdem ist zu beachten, daß $\lg \frac{R}{l}$ hier zu Null wird. Setzt man in Gl. (149) $m = 3^1/_3$, so gehen die beiden Gleichungen über in

$$\begin{aligned} -\,0{,}5\,c_1 - 0{,}25\,c_2 + 4{,}062\,c_4 &= 0 \\ -\,0{,}687\,c_1 + 8{,}483\,c_2 + 11{,}088\,c_4 &= 0\,. \end{aligned}$$

Die Auflösung der Gleichungen liefert

$$c_1 = 8{,}44\,c_4\,; \qquad c_2 = -\,0{,}63\,c_4$$

oder nach Einsetzen des Wertes von c_4

$$c_1 = 0{,}0086\,; \qquad c_2 = -\,0{,}00\,064\,.$$

Setzt man diese Werte in Gl. (140) ein und läßt dabei jene Glieder weg, die nicht mehr in Betracht kommen, weil x nur zwischen 0 und 1 liegen kann, so erhält man

$$z = 0{,}0086\left(1 - \frac{x^4}{64}\right) - 0{,}00\,064\,x^2 + 0{,}00\,102\,x^2 \lg x\,.$$

Der Auflagerdruck q für die Flächeneinheit im Abstande r von der Mitte ist zunächst nach den Gleichungen (116) und (132)

$$q = klz$$

und daher beim Einsetzen der Zahlenwerte in kg für 1 cm²

$$q = 4{,}3\left(1 - \frac{1}{64}\left(\frac{r}{l}\right)^4\right) - 0{,}32\left(\frac{r}{l}\right)^2 + 0{,}51\left(\frac{r}{l}\right)^2 \lg \frac{r}{l}\,.$$

In der Mitte, also für $r = 0$ wird

$$q_0 = 4{,}3 \text{ kg cm}^{-2}$$

und am Rande, also für $r = R = l$

$$q_R = 3{,}9 \cdot \text{kg cm}^{-2}.$$

Die Druckverteilung weicht daher bei einer Platte, deren Halbmesser gerade gleich der Länge l ist, noch wenig von der gleichförmigen ab.

Die Einsenkung in der Mitte ist gleich $c_1 l$, also hier gleich 0,107 cm. Für die Berechnung der Biegungsbeanspruchung der Platte gehen wir von Gl. (141) aus. In der Mitte wo die Beanspruchung offenbar am größten wird, sind nämlich σ_r und σ_t einander gleich, so daß wir σ_t nicht besonders zu berechnen brauchen. Setzen wir in Gl. (141) das darin vorkommende $z = \frac{h}{2}$, so ist zunächst

$$\sigma_r = -\frac{mEh}{2(m^2-1)}\left(m\frac{d^2\zeta_0}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\zeta_0}{dr}\right),$$

wofür auch mit Benutzung der Veränderlichen x und z an Stelle von r und ζ_0

$$\sigma_r = -\frac{mEh}{2(m^2-1)l}\left(m\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dz}{dx}\right)$$

geschrieben werden kann. Mit Benutzung des vorher aufgestellten abgekürzten Ausdrucks für z erhält man

$$\frac{dz}{dx} = -0{,}00\,054\,x^3 - 0{,}00\,026\,x + 0{,}00\,204\,x \lg x$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -0{,}00\,162\,x^2 + 0{,}00\,178 + 0{,}00\,204 \lg x.$$

Bei kleinen Werten von x kommt es in beiden Differentialquotienten nur auf das mit $\lg x$ behaftete Glied an, das für $x = 0$ sogar unendlich groß wird. Wir müssen aber beachten, daß sich die Last P nicht in einem einzigen Punkt überträgt, sondern sich über eine kleine Fläche verteilt, deren Durchmesser wir jedenfalls nicht kleiner als die Plattendicke h anzunehmen haben. Zur Berechnung der Beanspruchung können

wir daher $x = \frac{h}{2l}$ setzen und erhalten damit

$$\sigma_r = -\frac{mEh}{2(m^2-1)l}\Big(m \cdot 0{,}00\,178 - 0{,}00\,026 + \lg\frac{h}{2l}(m \cdot 0{,}00\,204 + 0{,}00\,204)\Big)$$

oder, wenn man die Zahlenwerte einsetzt,

$$\sigma_r = 875 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Nach dem in Band III besprochenen Näherungsverfahren würde man die Beanspruchung in der Mitte zu

$$\sigma = \frac{3P}{\pi h^2} = 478 \frac{kg}{cm^2}$$

einzuschätzen haben. Der Unterschied ist daher recht erheblich. Man muß aber bedenken, daß der Ansatz $x = h/2l$, von von dem wir hier zur Berechnung von σ_r ausgegangen sind, ebenfalls nur eine sehr willkürliche Schätzung bildete. In vielen Fällen wird es richtiger sein, x noch etwas größer anzunehmen; dann wird σ_r kleiner gefunden, so daß es sich nicht mehr so viel von dem nach der Näherungstheorie gefundenen Werte unterscheidet.

Endlich mag noch berechnet werden, wie sich die Druckverteilung gestaltet, wenn die Platte doppelt so groß ist, als zuvor, also für $R = 25$ cm $= 2l$, während sonst nichts geändert sein soll. Die Konstante c_4 behält dann ihren früheren Wert; die Gleichungen (148) und (149) zur Berechnung der Konstante c_1 und c_2 liefern dagegen

$$-0{,}826\,c_1 - 1{,}980\,c_2 + 1{,}208\,c_4 = 0$$
$$-2{,}665\,c_1 + 5{,}745\,c_2 + 16{,}37\,c_4 = 0.$$

Durch Auflösen der Gleichungen erhält man

$$c_1 = 3{,}93\,c_4 \quad \text{und} \quad c_2 = -1{,}03\,c_4$$

und nach Einsetzen des Wertes von c_4

$$c_1 = 0{,}00400 \quad \text{und} \quad c_2 = -0{,}00105.$$

In Gl. (140) für z muß man, da jetzt x zwischen 0 und 2 liegt, ein Glied mehr in einzelnen Reihen berücksichtigen, als zuvor, um eine genügende Genauigkeit zu erzielen. Nach Einsetzen der Konstanten findet man

$$z = 0{,}004\left(1 - \frac{x^4}{64}\right) - 0{,}00105\left(x^2 - \frac{x^6}{576}\right)$$
$$+ 0{,}00102\left\{\lg x\left[x^2 - \frac{x^6}{576}\right] + 1{,}447.10^{-3}x^6\right\}.$$

Der Auflagerdruck q wird daraus wieder durch Multiplikation mit kl erhalten; also in kg für 1 qcm

$$q = 2\left(1 - \frac{x^4}{64}\right) - 0{,}525\left(x^2 - \frac{x^6}{576}\right)$$
$$+ 0{,}51\left\{\lg x\left(x^2 - \frac{x^6}{576}\right) + 1{,}447.10^{-3}x^6\right\}.$$

In der Mitte, also für $x = 0$, wird

$$q_0 = 2{,}00\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

und am Rande, also für $r = R$ oder $x = 2$, wird

$$q_R = 0{,}88\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Bei einer Platte, deren Halbmesser das Doppelte der Konstanten l beträgt, findet demnach schon eine beträchtliche Abnahme des Auflagerdrucks von der Mitte nach dem Rande hin statt. Das gilt ganz unabhängig von dem besonderen Beispiele, das hier der Anschaulichkeit wegen zu Grunde gelegt war. Zugleich bemerkt man, daß sich die Konstanten c_1 und c_2, als Vielfache von c_4 ausgedrückt, jetzt schon den zuvor nach Hertz für die unendlich große Platte angegebenen Werten ziemlich genähert haben. Wenn man die Rechnung für $R = 3l$ wiederholen wollte, würde man sich überzeugen können, daß die Annäherung an jene Grenzwerte bei wachsendem R immer enger wird.

Anmerkung. Bei einer Platte von unendlich großem Halbmesser beträgt nach der Berechnung von Hertz die Einsenkung im Abstande l von der Mitte 0,646 f, im Abstande $2l$ ist sie 0,258 f

und im Abstande $3l$ gleich 0,066 f, wenn man mit f die Einsenkung in der Mitte selbst bezeichnet. Im Abstande 3,887 l von der Mitte wird die Einsenkung zu Null und darüber hinaus negativ. In größeren Abständen folgen sich dann in Perioden von $\pi\sqrt{2}\cdot l$ beständig Hebungen und Senkungen aufeinander, jedoch mit sehr schnell abnehmenden Amplituden. Die Platte wird durch die Belastung daher in ein vollständiges System kreisrunder Wellen verworfen. — Daß in einem größeren Abstande von der belasteten Stelle wieder Hebungen von geringem Betrage stattfinden, steht übrigens in Übereinstimmung mit dem gleichlautenden Ergebnisse, zu dem wir schon im dritten Bande für die Stäbe auf nachgiebiger Unterlage gelangt waren.

§ 23. Die elastischen Schwingungen der Platten.

Die Theorie der elastischen Schwingungen, die eine Platte auszuführen vermag, wenn sie irgendwo einen Stoß rechtwinklig zu ihrer Ebene erlitten hat und hierauf sich selbst überlassen wird, schließt sich sehr eng an die vorhergehenden Betrachtungen an. Führt man nach dem Prinzip von d'Alembert Trägheitskräfte ein, die für ein Plattenelement von der Fläche dF gleich

$$-\mu dF \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial t^2}$$

zu setzen sind, wenn μ die auf die Flächeneinheit bezogene Masse der Platte bezeichnet, so kann man die augenblickliche Gestalt der Platte als eine Gleichgewichtslage behandeln, die durch die Trägheitskräfte als Lasten hervorgebracht wird. Die Biegungsgleichung der Platte (106) liefert dann unmittelbar die Schwingungsgleichung, nämlich

$$\frac{m^2 E}{m^2-1}\frac{h^3}{12}\left(\frac{\partial^4 \zeta_0}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \zeta_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta_0}{\partial y^4}\right) + \mu\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial t^2} = 0. \qquad (151)$$

Man erhält eine Lösung dieser Gleichung wenn man

$$\zeta_0 = \zeta_0' \sin \alpha t \qquad (152)$$

setzt, worin jetzt ζ_0' eine Funktion bedeutet, die von t unabhängig ist und die, wie sich durch Einsetzen in Gl. (151) ergibt, der Gleichung

$$\frac{m^2 E}{m^2-1}\frac{h^3}{12}\left(\frac{\partial^4 \zeta_0'}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 \zeta_0'}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 \zeta_0'}{\partial y^4}\right)-\mu\alpha^2\zeta_0'=0 \qquad (153)$$

genügen muß. Diese Gleichung ist aber von ganz ähnlicher Art wie die Gleichung der Platte auf nachgiebiger Unterlage. Der Hauptunterschied besteht nur darin, daß das letzte Glied der linken Seite, das ζ_0' selbst enthält, hier negativ ist, während es bei der anderen Untersuchung positiv war. Dieser Unterschied ist zwar nicht unwesentlich; aber er hindert doch nicht, daß man die Aufgabe auf dieselbe Art behandeln kann, wie die vorige.

Beschränkt man sich z. B. auf die Schwingungen, die eine kreisförmige Platte in der Weise ausführen kann, daß ζ_0' nur eine Funktion des Abstandes r von der Mitte ist, so läßt sich Gl. (153) mit den in § 20 eingeführten Bezeichnungen entsprechend der Gl. (120) in der Form

$$\frac{m^2 E}{m^2-1}\frac{h^3}{12}\mathsf{E}^4\zeta_0'-\mu\alpha^2\zeta_0'=0 \qquad (154)$$

anschreiben oder auch mit Einführung einer einzigen Konstanten l, die eine Länge ist, nämlich

$$\frac{m^2 E}{m^2-1}\frac{h^3}{12\mu\alpha^2}=l^4$$

in der der Gleichung (122) entsprechenden Form

$$l^4\mathsf{E}^4\zeta_0'-\zeta_0'=0. \qquad (155)$$

Auch die weitere Behandlung der Gleichung kann in derselben Weise fortgesetzt werden, wie in § 20. Die partikulären Lösungen, die sich durch Besselsche Funktionen oder unmittelbar durch die diesen entsprechenden Reihenentwickelungen darstellen lassen, fallen hier zwar etwas anders aus, als in § 20, sind aber von ähnlicher Art und lassen sich in derselben Weise wie dort ermitteln. Ich gehe darauf jetzt nicht näher ein, weil mir die Theorie der Plattenschwingungen für den Techniker von geringerem Wert zu sein scheint, als die in § 20 behandelte ähnliche Aufgabe.

Jedem Werte von α in Gl. (152) entspricht übrigens eine besondere Schwingungsdauer $T=2\pi/\alpha$ oder eine entsprechende

Tonhöhe der von der schwingenden Platte ausgesendeten Schallwellen. Und jedem Werte von α ist auch ein anderer Wert der Konstanten l zugeordnet. Hierdurch ist ein einfaches Mittel gegeben, die theoretische Lösung der Aufgabe mit dem Versuche, nämlich mit den durch die Versuchsanordnung von Chladni hergestellten Klangfiguren zu vergleichen, die sich auf einer schwingenden Platte ausbilden, wenn man sie mit einem feinen Pulver bestreut hat. Die Pulverkörnchen sammeln sich an jenen Stellen an, für die ζ_0' gleich Null wird, d. h. in konzentrischen Kreisen, deren aufeinanderfolgende Radien von der Konstanten l und hiermit von der Tonhöhe abhängig sind.

Das physikalische Interesse, das sich an die Lösung der Gleichung (155) knüpfte, hat bewirkt, daß man sich mit der Theorie der Plattenschwingungen schon vor fast 100 Jahren zu beschäftigen anfing. Im Jahre 1850 hat dann Kirchhoff eine vollständige Lösung für die kreisförmige Platte gegeben, die auch noch andere Schwingungen als die vorher erwähnten umfaßt; darauf noch weiter einzugehen, liegt aber hier kein Grund vor.

§ 24. Dünne Platten mit großer Ausbiegung.

Bei der Ableitung der Biegungsgleichung der Platte in § 17 wurde vorausgesetzt, daß die Ordinate ζ_0 der Biegungsfläche klein gegenüber der Plattendicke h bleibe und alle Entwickelungen der §§ 17 bis 23 sind nur so lange gültig, als diese Voraussetzung zutrifft. Jetzt wollen wir den entgegengesetzten Fall betrachten, nämlich eine Platte oder ein Blech von so geringer Dicke, daß die Ausbiegungen unter dem Einflusse der Lasten weit größer sind, als die Dicke h. Der Biegungswiderstand, der proportional mit h^3 ist, wird dann ebenfalls äußerst klein, so daß der Körper nahezu so betrachtet werden kann, als wenn er absolut biegsam wäre. Vorausgesetzt wird übrigens, daß die Platte im unbelasteten Zustande nicht angespannt ist, so daß alle Spannungen nur von den lotrecht zur Plattenebene wirkenden Lasten herrühren. Den anderen Fall, in dem eine biegsame Haut ähnlich wie ein Trommelfell von vornherein angespannt ist, werden wir noch an einer anderen Stelle (§ 30) behandeln.

Nun muß ich von vornherein bemerken, daß die rein theoretische Untersuchung der dünnen Platte mit großer Ausbiegung große Schwierigkeiten macht. Die Aufstellung der Differentialgleichungen, von denen die Lösung abhängt, ist zwar noch verhältnismäßig einfach. Diese Gleichungen sind aber nicht linear, so daß brauchbare Lösungen nicht leicht davon zu gewinnen sind. Darin ist wohl auch der Grund dafür zu suchen, daß die Aufgabe bisher, soweit mir bekannt ist, noch nicht in Angriff genommen wurde. Durch solche Integrationsschwierigkeiten darf man sich aber bei Fragen, die durch ein praktisches Bedürfnis hervorgerufen werden, von einer Behandlung nicht abhalten lassen. Wenn auch die rein mathematische Untersuchung nicht vollständig zu dem gewünschten Ziele führt, so vermag sie doch wichtige Aufschlüsse zu geben, die in Verbindung mit den aus der Beobachtung zu gewinnenden Angaben zu einer für praktische Zwecke vollständig ausreichenden Beantwortung der Frage zu führen vermögen. Ein solches Zusammenwirken beider Erkenntnisquellen, des Versuchs einerseits und der mathematischen Deduktion andererseits wird auch im vorliegenden Falle nötig und zugleich ausreichend sein, um brauchbare Lösungen zu gewinnen. Als Vorarbeit dazu sind die nachfolgenden Erörterungen zu betrachten.

Da die Plattendicke h jetzt sehr klein gegen die vorkommenden Ausbiegungen ζ sein soll, können wir ζ als konstant über die ganze Plattendicke betrachten, so daß es nur noch eine Funktion von x und y ist. Der Zeiger 0 in ζ_0, der früher auf die Mittelfläche hinwies, kann daher jetzt weggelassen und an Stelle von ζ_0 kann einfach ζ geschrieben werden. Im übrigen soll jedoch auch jetzt noch ζ als klein gegen die Länge und Breite der Platte betrachtet werden; nur mit dem Vorbehalte, daß h von noch höherer Ordnung klein ist, so daß gegenüber der früher in § 17 gemachten Annahme beide jetzt die Rollen miteinander vertauscht haben.

Der unter diesen Umständen in der Platte auftretende Spannungszustand ist von ganz anderer Art, als der früher

besprochene. Jene Spannungsanteile, die früher vernachlässigt werden durften, spielen jetzt die Hauptrolle, während umgekehrt jene, auf die früher ausschließlich oder wenigstens in erster Linie zu achten war, jetzt so unbedeutend sind, daß sie gegen die anderen zu vernachlässigen sind.

Insbesondere muß jetzt auch auf die Verschiebungen ξ und η parallel zur Plattenebene geachtet werden. Diese sind zwar offenbar von höherer Ordnung klein, als die Ausbiegungen ζ, so daß bei der Untersuchung der dickeren Platten von ihnen abgesehen werden konnte. Hier aber, wo die ζ an sich schon größer sind, können auch die Verschiebungskomponenten $\xi\eta$ etwas größere Werte annehmen, und da sich herausstellen wird, daß die Dehnungen in der Plattenebene, so weit sie von der Ausbiegung ζ abhängen, von der Ordnung $(\partial\zeta/\partial x)^2$ sind, kommen die von ξ und η herrührenden, die von der Ordnung $\partial\xi/\partial x$ sind, daneben als vollkommen gleichberechtigt in Betracht. Wir wollen zunächst die durch ζ allein hervorgebrachten Formänderungen eines Plattenelementes untersuchen und später die von ξ und η herrührenden hinzufügen.

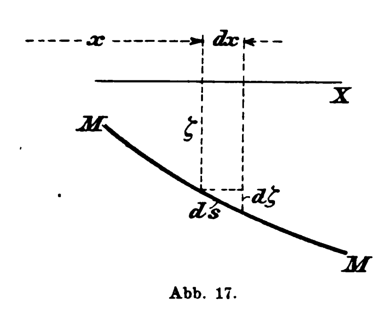


Abb. 17.

In Abb. 17 stellt MM einen in der Richtung der XZ-Ebene durch die Platte gelegten Schnitt dar. Diese Abbildung entspricht im übrigen der Abbildung 13, S. 99, die den Entwickelungen in § 17 zu Grunde gelegt wurde, nur mit dem Unterschiede, daß man sich die Plattendicke so gering denken muß, daß sie von der Ordnung der Strichdicke ist. Falls wir jetzt nur die Senkungen ζ ins Auge fassen, wird aus der Strecke dx eine Strecke ds, die sich nach dem Pythagoräischen Satze zu

$$ds = \sqrt{dx^2 + d\zeta^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2} = dx\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2\right)$$

berechnet. Beim Ausziehen der Quadratwurzel ist darauf zu

achten, daß nach unseren Voraussetzungen $\partial \zeta / \partial x$ als klein gegen 1 angesehen werden kann. Hiernach würde die auf die Längeneinheit bezogene Dehnung in der Mittelfläche zu

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 \quad \text{und ebenso} \quad \varepsilon_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2 \tag{156}$$

gefunden. In § 17 durften wir diese Beträge gegenüber den in den Gleichungen (101) festgestellten Dehnungen

$$\varepsilon_x = -z\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} \quad \text{und} \quad \varepsilon_y = -z\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2}$$

vernachlässigen. Jetzt ist aber umgekehrt der Faktor z von höherer Ordnung klein als $\partial \zeta / \partial x$, während $\partial^2 \zeta / \partial x^2$ mit $\partial \zeta / \partial x$ von gleicher Größenordnung ist. Wir erkennen daraus, daß wir jetzt berechtigt sind, die durch die Biegung hervorgerufenen mit z proportionalen Dehnungsanteile gegenüber den in den Gleichungen (156) angegebenen zu vernachlässigen. Auch die zugehörigen Spannungen σ_x und σ_y sind daher als unabhängig von z und daher als gleichmäßig über die ganze Plattendicke h verteilt zu betrachten.

Zu den in den Gleichungen (156) angeführten Dehnungen kommen aber noch jene, die von den elastischen Verschiebungen $\xi\eta$ parallel zur Plattenebene herrühren und im ganzen hat man daher

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \xi}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial \eta}{\partial y}. \tag{157}$$

Für die Spannungen σ_x und σ_y erhält man hieraus nach dem Elastizitätsgesetze die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{mE}{m^2-1}\left\{m\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right\} \\ \sigma_y &= \frac{mE}{m^2-1}\left\{m\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{158}$$

Denkt man sich ferner von irgend einem Punkte der Mittelfläche ausgehend im ursprünglich ebenen Zustande der Platte zwei Linienelemente dx und dy parallel zu den positiven Koordinatenachsen gezogen, die die Katheten eines recht-

winkligen Dreiecks bilden, dessen Hypotenuse $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ist, so geht dieses Dreieck durch Ausführung der Senkungen ζ in ein anderes Dreieck über, das nicht mehr genau rechtwinklig ist. Die Änderung, die der ursprünglich rechte Winkel erfährt, sei mit γ bezeichnet. Man berechnet γ leicht, indem man zuerst die neuen Seitenlängen feststellt und hierauf den Kosinussatz auf das neu entstandene Dreieck anwendet. Aus der Kathete dx wird $dx\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2}$, aus dy ebenso $dy\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2}$ und aus ds wird

$$\sqrt{ds^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}dx - \frac{\partial \zeta}{\partial y}dy\right)^2}.$$

An Stelle des cos des um einen Rechten ein wenig abweichenden Winkels kann man sin γ oder auch, da γ klein ist, kurz γ schreiben. Der Kosinussatz für das neu entstandene Dreieck lautet daher

$$ds^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}dx - \frac{\partial \zeta}{\partial y}dy\right)^2$$
$$= dx^2 + dx^2\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + dy^2 + dy^2\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2 - 2\,dx\,dy\,\gamma,$$

denn im letzten Gliede der rechten Seite braucht man auf die Änderungen der Seitenlängen dx und dy nicht zu achten, da sie zu Gliedern führen würden, die von höherer Ordnung klein wären. Die Gleichung liefert nach Fortheben der beiderseits gleichen Glieder

$$\gamma = \frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y}.$$

Dabei bedeutet ein positiver Wert von γ eine Verkleinerung des ursprünglich rechten Winkels. Eine solche Verkleinerung wird aber auch durch die Verschiebungen $\xi\eta$ herbeigeführt, die wie bekannt (siehe Gl. (277), Band III) gleich

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

ist und im ganzen erhalten wir daher für die Winkeländerung γ

$$\gamma = \frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

und für die Schubspannungen τ_{xy} und τ_{yx} finden wir nach dem Elastizitätsgesetze

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = G\left(\frac{\partial \zeta}{dx}\frac{\partial \zeta}{dy} + \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right). \tag{159}$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir zur Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen für die an einem rechteckigen Plattenelemente angreifenden Spannungen schreiten. Eine neue Figur ist dazu nicht nötig; wir können vielmehr auf Abb. 14, S. 101 verweisen. Doch ist jetzt zu berücksichtigen, daß die Normalspannung σ_x wegen der merklichen Durchbiegung ζ nun auch eine vertikale Komponente liefert, die für das Rechteck vom Inhalte hdy gleich

$$\sigma_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} hdy$$

gesetzt werden kann. Auf der gegenüber liegenden Schnittfläche tritt eine entsprechende Komponente auf, die sich von der vorigen um ein Differential unterscheidet und entgegengesetzt gerichtet ist. Die algebraische Summe beider Komponenten kann daher gleich

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_x \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) dxhdy$$

gesetzt werden. Bei positivem Werte gibt dieser Ausdruck eine nach abwärts, also im Sinne der positiven Z-Achse wirkende Kraft an. Ebenso lassen sich auch die vertikalen Komponenten der Normalspannungen σ_y auf den beiden anderen Schnittflächen zusammenfassen und die Summe beider Ausdrücke wird nachher in die Gleichung einzusetzen sein, die das Gleichgewicht gegen Verschieben in der Richtung der Z-Achse ausspricht.

Diesen Werten gegenüber sind die Kräfte

$$\frac{\partial V_{yz}}{\partial y} dy + \frac{\partial V_{xz}}{\partial x} dx,$$

die früher bei der dickeren Platte das Gleichgewicht gegen Verschieben im Sinne der Lasten p herzustellen hatten, wie

aus den Gleichungen (104) und (105) hervorgeht, bei den jetzt hinsichtlich der Größenordnung der h und ζ umgekehrten Verhältnisse zu vernachlässigen. Außer den Normalspannungen kommen daher in den Schnittflächen nur noch die Schubspannungen τ_{xy} und τ_{yx} in Betracht, die ebenso wie die σ_x und σ_y als unabhängig von z anzusehen sind.

Auch diese Schubspannungen haben vertikale Komponenten, die von gleicher Größenordnung mit den vorher untersuchten und daher in die Gleichgewichtsbedingung gegen Verschieben mit aufzunehmen sind. Auf der Seitenfläche $h\,dy$ hat die Schubspannung die vertikale Komponente

$$\tau_{yx} \frac{\partial \zeta}{\partial y} h\,dy$$

und beim Zusammenfassen mit der entsprechenden Komponente der gegenüberliegenden Schnittfläche erhält man als algebraische Summe

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau_{yx} \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) h\,dx\,dy.$$

Wenn dieser Ausdruck positiv ist, bedeutet er nach den allgemeinen Zeichenfestsetzungen eine nach abwärts, also im Sinne der positiven Z-Achse wirkende Kraft. Bildet man in derselben Weise die Summe der vertikalen Komponenten der Schubspannungen auf den beiden anderen Schnittflächen und setzt hierauf die Summe aller in der Richtung der Z-Achse gehenden Kräfte gleich Null, so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \tau \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma_y \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \tau \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) + \frac{p}{h} = 0. \quad (160)$$

Dabei ist mit h dividiert und an Stelle von τ_{xy} oder τ_{yx} einfacher τ geschrieben; unter p ist wie früher die Flächendichte der Belastung zu verstehen.

Das Gleichgewicht gegen Verschieben in den Richtungen der horizontalen Koordinatenachsen führt zu denselben Gleichungen, wie bei einer Scheibe, nämlich

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0. \quad (161)$$

Führt man schließlich noch in Gl. (160) die Differentiationen aus und beachtet die Gleichungen (161), so vereinfacht sie sich zu

$$\sigma_x \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + 2\tau \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} + \frac{p}{h} = 0. \tag{162}$$

Wir haben jetzt die 6 Gleichungen, die zur Bestimmung der sechs unbekannten Funktionen $\xi \eta \zeta \sigma_x \sigma_y \tau$ im Zusammenhange mit den Grenzbedingungen ausreichen, nämlich die Gleichungen (158), (159), (161) und (162). Um die Zahl der Unbekannten zu vermindern, kann man in derselben Weise wie früher bei der Scheibe eine Spannungsfunktion F einführen, indem man

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \tag{163}$$

setzt, womit die Gleichungen (161) befriedigt sind. Gleichung (162) schreibt sich damit in der Form

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} + \frac{p}{h} = 0. \tag{164}$$

Eine zweite Gleichung, die nur noch die unbekannten Funktionen F und ζ enthält, läßt sich aus den Gleichungen (158) und (159) durch Elimination von ξ und η gewinnen. Man löst dazu die Gleichungen (158) nach $\partial \xi / \partial x$ und $\partial \eta / \partial y$ auf und setzt diese Werte in die aus Gl. (159) durch Differentiation nach x und y erhaltene Gleichung ein. Die Ausführung der Rechnung, die keine Schwierigkeiten macht, liefert

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = E\left(\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right). \tag{165}$$

Um bei gegebenem p den Spannungs- und Formänderungszustand der dünnen Platte zu finden, hätte man zunächst Funktionen F und ζ zu suchen, die den Gleichungen (164) und (165) genügen, hierauf durch Zurückgehen auf die Gleichungen (158) und (159) auch ξ und η zu ermitteln und die in den Lösungen willkürlich gebliebenen Funktionen oder Konstanten so zu bestimmen, daß überall am Rande $\xi \eta \zeta$ zu Null werden. Das ist nun freilich im allgemeinen nicht ausführbar.

Eine Erleichterung wäre dadurch leicht herbeizuführen, daß man zunächst F und ζ nur so bestimmt, daß Gl. (165) befriedigt und die Grenzbedingungen erfüllt werden, worauf man Gl. (164) nachträglich dazu benutzen könnte, die Belastungsverteilung, nämlich p als Funktion von x und y zu ermitteln. Man hätte dann wenigstens für diese bestimmte Lastverteilung die Aufgabe streng gelöst.

Aber auch in dieser Form ist die Aufgabe immer noch sehr schwierig. In den einfachsten Fällen kommt man zwar auf diesem Wege zum Ziele, so namentlich bei der kreisförmigen Platte mit ringsum symmetrischer Belastung, auf die ich nachher noch zurückkommen werde. Noch einfacher wird die Lösung für die mittleren Teile einer rechteckigen Platte gefunden, von der eine Seite viel länger ist, als die andere, so daß sie als unendlich lang betrachtet werden kann. Legt man die X-Achse in die Richtung der Langseite durch die Plattenmitte, so kann für nicht sehr große x der Spannungs- und Formänderungszustand als unabhängig von x betrachtet werden. Man darf daher

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad \xi = 0, \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} = 0, \quad \tau = 0$$

setzen und findet zuerst aus den Gleichungen (161), daß σ_y eine Konstante ist, während Gl. (162) in

$$\sigma_y \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{p}{h} = 0$$

übergeht, woraus für ein konstantes p die Ausbiegung ζ als Funktion zweiten Grades von y gefunden wird, d. h. ein Schnitt durch die Mittelfläche in der Richtung der YZ-Ebene geht in einen Parabelbogen über. Aus den Gleichungen (158) folgt zunächst $\sigma_x = \sigma_y / m$ und ferner

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial \eta}{\partial y} = \sigma_y \frac{m^2 - 1}{m^2 E}$$

woraus in Verbindung mit der vorhergehenden Gleichung, die zuvor mit Berücksichtigung der Grenzbedingungen $\partial \zeta / \partial y = 0$

für $y = 0$ und $\zeta = 0$ für $y = b$ (wenn b die halbe Breite der Platte bedeutet) integriert wird,

$$\zeta = \frac{p}{h\sigma_y} \cdot \frac{b^2 - y^2}{2}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \sigma_y \frac{m^2 - 1}{m^2 E} - \frac{1}{2}\left(\frac{py}{h\sigma_y}\right)^2$$

folgt. Eine nochmalige Integration liefert

$$\eta = \sigma_y \frac{m^2 - 1}{m^2 E} y - \left(\frac{p}{h\sigma_y}\right)^2 \cdot \frac{y^3}{6} + C.$$

Die Integrationskonstante C muß gleich Null gesetzt werden, weil η für $y = 0$ der Symmetrie wegen verschwinden muß. Endlich bleibt noch die Grenzbedingung $\eta = 0$ für $y = b$ zu erfüllen, aus der man durch Auflösen nach σ_y

$$\sigma_y = \sqrt[3]{\frac{m^2 E}{6(m^2 - 1)} p^2 \frac{b^2}{h^2}} \tag{166}$$

erhält, womit die Aufgabe gelöst ist. Über den Spannungs- und Formänderungszustand in der Nähe der Schmalseite der Platte vermag aber diese Betrachtung natürlich keinen Aufschluß zu geben.

Nun könnte es wohl sein, daß sich auch noch für einige andere einfache Fälle auf dem bisher besprochenen Wege eine Lösung finden ließe. Im allgemeinen und auch schon für den praktisch sehr wichtigen Fall der rechteckigen Platte wird es aber nötig sein, das Experiment zu Hülfe zu nehmen. Dazu hätte man mit Hülfe von Feinmeßapparaten die Verschiebungskomponenten $\xi\eta\zeta$ für eine Reihe von Punkten unmittelbar zu messen. Trägt man die Messungsresultate graphisch auf, so wird es möglich sein, $\xi\eta\zeta$ wenigstens ungefähr als Funktionen von x und y durch einfache Ausdrücke darzustellen. Wenn es möglich wäre, die Funktionen $\xi\eta\zeta$ durch solche Messungen genau zu ermitteln, bedürfte es keiner weiteren theoretischen Betrachtungen mehr, da mit $\xi\eta\zeta$ auch die Spannungen nach den Gleichungen (158) und (159) bekannt wären. Durch Messungen allein lassen sich aber diese Funktionen nicht mit genügender Annäherung darstellen. Setzt man die zunächst erhaltenen Ausdrücke in die hier aufgestellten Gleichungen ein, so werden sich Widersprüche herausstellen. Man wird daher

Verbesserungen anzubringen haben, um diese Widersprüche zu vermindern, wenn es auch nicht möglich sein wird, sie vollständig zum Verschwinden zu bringen. Hierbei kann man noch je nach der Lage des Falles auf verschiedene Art vorgehen, um zu einer hinlänglich genauen Lösung zu gelangen. Für den Fall der kreisförmigen Platte soll dies noch etwas näher besprochen werden.

Setzt man unter der Voraussetzung, daß p, ζ und F nur Funktionen des Abstandes r von der Mitte der Platte sind, die Gleichungen (164) und (165) nach der in § 11 besprochenen Anleitung in Polarkoordinaten um, so geht die erste von ihnen über in

$$\frac{d^2 F}{dr^2} \cdot \frac{1}{r} \frac{d\zeta}{dr} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} \cdot \frac{d^2 \zeta}{dr^2} + \frac{p}{h} = 0$$

wofür man auch einfacher

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{dF}{dr}\frac{d\zeta}{dr}\right) + \frac{pr}{h} = 0, \tag{167}$$

schreiben kann. Für ein konstantes p ließe sich die Gleichung sehr einfach einmal integrieren; wir wollen aber jetzt annehmen, daß p noch irgend eine Funktion von r sein kann und daher die Gleichung so stehen lassen.

Gleichung (165) geht durch die Umsetzung in Polarkoordinaten über in

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^2 F = -E \frac{1}{r} \frac{d\zeta}{dr} \frac{d^2\zeta}{dr^2} = -\frac{E}{2r} \frac{d}{dr} \left(\frac{d\zeta}{dr}\right)^2.$$

Multipliziert man mit r und integriert einmal, so erhält man

$$r \frac{d}{dr}\left(\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dF}{dr}\right) = -\frac{E}{2}\left(\frac{d\zeta}{dr}\right)^2 + K. \tag{168}$$

Die Integrationskonstante K ist gleich Null zu setzen, weil für $r = 0$ auch $d\zeta/dr$ zu Null werden muß. Wenn man sich der Bedeutung von F erinnert, kann übrigens, nebenbei bemerkt, Gl. (168) auch in der Form

$$r \frac{d}{dr}(\sigma_r + \sigma_t) = -\frac{E}{2}\left(\frac{d\zeta}{dr}\right)^2$$

angeschrieben werden. Da eine allgemeine Integration der simultanen Gleichungen (167) und (168) in geschlossener Form nicht möglich ist, muß man sie auf andere Weise zu benutzen suchen. Das kann zunächst so geschehen, wie es vorher schon beschrieben war. Man nimmt für $d\zeta/dr$ irgend eine passend erscheinende Funktion von r an, worauf man Gl. (168) ohne Schwierigkeit integrieren kann. Die eine der dabei auftretenden Integrationskonstanten ist hierauf so zu bestimmen, daß die Dehnung ε_t oder, was auf dasselbe hinauskommt, der Ausdruck $\sigma_t - \frac{1}{m}\sigma_r$ für $r = a$ (a = Plattenhalbmesser) zu Null wird. Dann setzt man F und ζ in Gl. (167) ein und bestimmt dadurch die Lastverteilung (nämlich p als Funktion von r), für die die angenommene Lösung genau zutrifft. Hierdurch läßt sich immerhin eine Reihe von Fällen streng erledigen.

Auch hier ist es aber vorteilhafter, einen Versuch zu Hülfe zu nehmen, indem man ζ als Funktion von r durch Messung ermittelt, was ja mit genügender Annäherung leicht möglich ist. Dann verfährt man genau wie vorher beschrieben. Die Probe auf die Genauigkeit, mit der man ζ ermittelt hat, wird durch die Gl. (167) geliefert. Man wird dann p aus dieser Gleichung etwas anders finden, als es tatsächlich bei dem Versuche aufgebracht war und durch geringe Abänderungen der anfänglich angenommenen Funktion wird man leicht eine genügende Übereinstimmung herstellen können.

Eine andere Anwendung können diese Gleichungen finden, wenn man p von vornherein überhaupt nicht kennt, sondern es erst durch einen Versuch zu bestimmen beabsichtigt. Man hat z. B. in den letzten Jahren mehrfach Versuche angestellt, um den Bodendruck in einem Getreidesilo zu ermitteln. Schließt man nun die untere Öffnung eines kreisförmigen Schachtes mit einer Platte, die so dünn ist, daß die Ausbiegungen, die sie erfährt, erheblich größer sind, als die Plattendicke und mißt die Ausbiegungen ζ nach Füllen des Behälters, so kann man nach vorheriger Integration von

Gl. (168) die Verteilung des Bodendruckes aus Gl. (167) leicht entnehmen.

Aus den allgemeinen Gleichungen (164) und (165) läßt sich übrigens noch eine Schlußfolgerung ziehen, die Erwähnung verdient. Angenommen nämlich, man habe für ein gegebenes p Lösungen F und ζ dieser Gleichungen gefunden, die zugleich den Grenzbedingungen genügen; dann sind auch $\alpha^2 F$ und $\alpha\zeta$, worin α eine beliebige Verhältniszahl bedeutet, Lösungen für den Fall, daß p überall im Verhältnisse $1:\alpha^3$ vergrößert wird. Mit anderen Worten heißt dies, daß beim proportionalen Anwachsen aller Lasten die Ausbiegungen ζ wie die $^1/_3$te und die Spannungen wie die $^2/_3$te Potenz der Lasten anwachsen.

Schließlich mache ich noch auf die schon im dritten Bande in Aufg. 38, S. 298 angegebene einfache Näherungslösung für die einem gleichförmig verteilten Drucke ausgesetzte kreisförmige dünne Platte aufmerksam, die freilich auf sehr willkürlichen Annahmen beruht, einstweilen aber immerhin für praktische Zwecke als ausreichend betrachtet werden kann. Auf dem hier besprochenen Wege wird man ja freilich zu einer besseren Lösung gelangen können; so lange sie noch fehlt, kann man sich aber auch mit jener begnügen.

Dritter Abschnitt.

Die Verdrehungselastizität von prismatischen Stäben und von Umdrehungskörpern.

§ 25. Der rechteckige Stab.

Die allgemeine Theorie der Torsion eines prismatischen Stabes von beliebigem Querschnitt wurde schon im dritten Bande, insbesondere in § 72 (S. 384 der dritten Auflage) auseinandergesetzt. Diese Betrachtungen kann ich hier als bekannt voraussetzen und unmittelbar an sie anknüpfen.

Für ein Koordinatensystem, das an dem Stab selbst festgeheftet ist, so daß im Ursprunge sowohl ξ, η, ζ als auch die Differentialquotienten $\frac{\partial \eta}{\partial x}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ und $\frac{\partial \xi}{\partial y}$ zu Null werden und dessen X-Achse mit der Stabachse vor der Formänderung zusammenfällt, hat man für die Verschiebungen η, ζ parallel zur YZ-Ebene nach den Gleichungen (320) des dritten Bandes

$$\eta = cxz; \qquad \zeta = -cxy \tag{169}$$

während die in der Richtung der Stabachse erfolgende Verschiebung ξ unabhängig von x ist und der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = 0 \tag{170}$$

genügen muß. Durch die Gleichungen (169) wird eine kleine Drehung des im Abstande x vom Ursprunge liegenden Querschnitts um den Winkel cx dargestellt; die Konstante c gibt daher den auf die Längeneinheit des Stabes bezogenen Ver-

drehungswinkel an. Gl. (170) liefert dagegen nach ihrer Integration, durch die ξ als Funktion von y und z dargestellt wird, die Gleichung der gekrümmten Fläche, in die der vormals ebene Querschnitt durch die Verschiebungen ξ übergeht.

Die allgemeine Lösung der Gl. (170) enthält zwei willkürliche Funktionen, zu deren näherer Bestimmung die am Mantel des Stabes bestehenden Grenzbedingungen zu verwenden sind. Da der Mantel frei von äußeren Kräften sein soll, muß nämlich nach dem Satze von der Gleichheit der einander zugeordneten Schubspannungen die Schubspannung im Querschnitte an jeder Stelle des Querschnittsumfangs tangential gerichtet sein. Diese Bedingung reicht in Verbindung mit Gl. (170) zur eindeutigen Bestimmung der Funktion ξ aus. Für die Schubspannungskomponenten im Querschnitte hat man allgemein

$$\tau_{xy} = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right); \qquad \tau_{xz} = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)$$

und daher hier unter Berücksichtigung der Gleichungen (169)

$$\tau_{xy} = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + cz\right); \qquad \tau_{xz} = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - cy\right). \tag{171}$$

Ist die Gleichung des Querschnittsumrisses in der Form

$$z = f(y)$$

gegeben, so wird die am Umfange zu erfüllende Grenzbedingung durch die Gleichung

$$\frac{\dfrac{\partial \xi}{\partial z} - cy}{\dfrac{\partial \xi}{\partial y} + cz} = \frac{dz}{dy} \tag{172}$$

ausgesprochen, die im dritten Bande unter der Nummer (324) aufgeführt war.

Eine strenge Lösung der Aufgabe, ξ nach Gl. (170) unter Berücksichtigung der Grenzbedingung (172) zu ermitteln, wurde im dritten Bande nur für den kreisförmigen und den elliptischen Querschnitt gegeben. Außer diesen beiden ist für die Anwendungen besonders der rechteckige Querschnitt von Wichtigkeit. Nun ist freilich die Funktion ξ für diesen Fall von so verwickelter Art, daß sie sich nicht durch die ge-

wöhnlichen Funktionen der Analysis in geschlossener Form darstellen läßt. Dagegen ist eine Darstellung durch Reihenentwickelungen und zwar noch auf verschiedene Arten möglich. Da es sich um einen praktisch recht wichtigen Fall handelt, dürfen wir die Mühe, die mit einer solchen Darstellung verbunden ist, nicht scheuen. Um so mehr, als wir dadurch erst

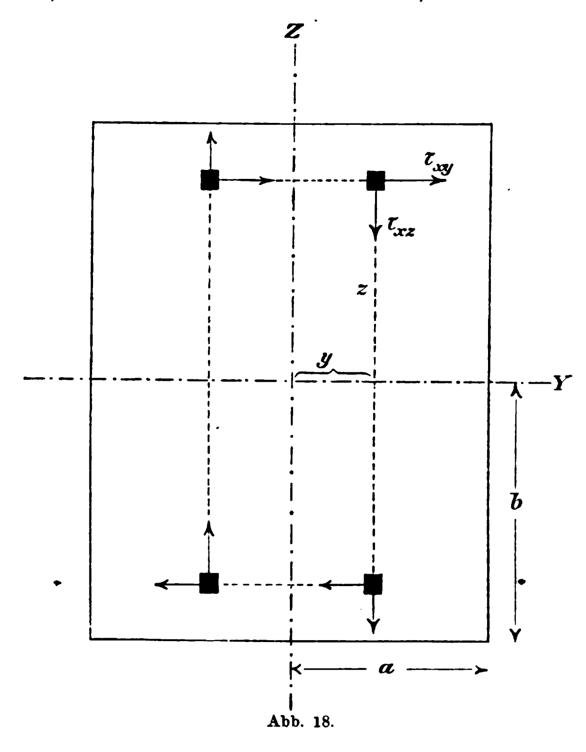


Abb. 18.

zu einer besser gesicherten Grundlage für die Aufstellung passender Näherungsformeln gelangen. Denn daß die in § 59 des dritten Bandes gegebene übliche Näherungstheorie für die Torsion der Wellen von rechteckigem Querschnitte nicht recht befriedigend ist, wird jeder schon empfunden haben, der in diesen Gegenstand tiefer einzudringen wünschte.

Zunächst setze ich Abb. 71 des dritten Bandes als Abb. 18 nochmals hierher und erinnere daran, daß sich aus den da-

mals angestellten Symmetriebetrachtungen, die durchaus einwandfrei waren, τ_{xy} als eine gerade Funktion von y und eine ungerade Funktion von z, dagegen τ_{xz} als eine gerade Funktion von z und eine ungerade Funktion von y herausgestellt hatte, wie dies aus den in die Abbildung eingezeichneten

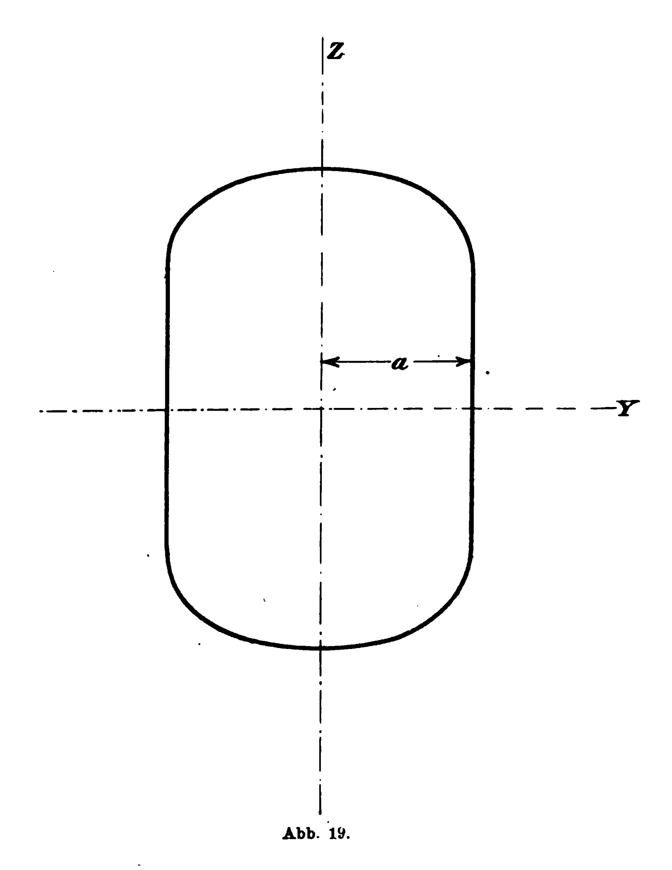


Abb. 19.

Pfeilrichtungen hervorgeht. Davon können wir auch hier Gebrauch machen.

Ferner soll die Aufgabe anfänglich noch etwas vereinfacht werden. An Stelle des rechteckigen Querschnitts soll nämlich zuerst ein Querschnitt wie in Abb. 19 betrachtet werden, der

zwar immer noch von zwei geraden Seiten nach links und rechts begrenzt, nach oben und unten aber durch irgend zwei symmetrisch zueinander liegende Kurven abgeschlossen wird. Auch ein Querschnitt von dieser Gestalt kommt bei den Anwendungen öfters vor und es rechtfertigt sich daher seine Behandlung schon aus diesem Grunde. Außerdem werden wir aber, nachdem eine Lösung für diesen Fall gefunden ist, durch passende Änderungen die Lösung auch dem Falle anpassen können, daß die obere und untere Abschlußkurve in gerade Linien übergehen, womit wir auf den rechteckigen Querschnitt kommen, für den wir die Lösung eigentlich suchen. Die vorher hervorgehobenen Symmetrieeigenschaften bleiben natürlich bei dem ebenfalls doppelt-symmetrischen Querschnitt der Abb. 19 in derselben Weise bestehen.

Setzen wir nun versuchsweise

$$\xi = Y \cdot Z \tag{173}$$

worin Y und Z Funktionen von y und von z allein bedeuten, so muß nach Gl. (170)

$$Z \frac{d^2 Y}{d y^2} + Y \frac{d^2 Z}{d z^2} = 0 \tag{174}$$

sein. Achten wir in dieser Gleichung nur auf die Variable y, so ist sie von der Form

$$\frac{d^2 Y}{d y^2} \pm C Y = 0,$$

wobei C von y unabhängig ist. Die Lösung ist daher entweder ein Sinus oder Kosinus oder auch eine Exponentialfunktion je nach dem Vorzeichen von C. Wir wählen

$$Y = \sin \alpha y$$

womit Gleichung (174) übergeht in

$$-\alpha^2 Z + \frac{d^2 Z}{d z^2} = 0,$$

deren Lösung sich sofort zu

$$Z = C_1 e^{\alpha z} + C_2 e^{-\alpha z}$$

angeben läßt. Der in Gl. (173) versuchte Ansatz läßt sich daher in der näher bestimmten Form

$$\xi = \sin \alpha y \left(C_1 e^{\alpha z} + C_2 e^{-\alpha z}\right)$$

aufrecht erhalten, in der α, C_1 und C_2 beliebige Konstanten sind. Außerdem ist auch noch

$$\xi = -cyz$$

eine Lösung der Differentialgleichung (170) und aus beiden zusammen wollen wir die weitere partikuläre Lösung

$$\xi = \sin \alpha y \left(C_1 e^{\alpha z} + C_2 e^{-\alpha z}\right) - cyz \tag{174a}$$

bilden, die wir nun den vorgeschriebenen Grenzbedingungen anzupassen suchen. Nach den Gleichungen (171) erhalten wir für die Schubspannungskomponenten bei diesem Werte von ξ

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= G\alpha \cos \alpha y \left(C_1 e^{\alpha z} + C_2 e^{-\alpha z}\right) \\ \tau_{xz} &= G\left\{\alpha \sin \alpha y \left(C_1 e^{\alpha z} - C_2 e^{-\alpha z}\right) - 2cy\right\}. \end{aligned}$$

Nun muß τ_{xy} in unserem Falle eine ungerade Funktion von z sein; das wird bei dem vorliegenden Ansatze nur erfüllt, wenn wir

$$C_2 = -C_1$$

setzen. Dann tritt aber in der Tat, wenn wir $+z$ durch $-z$ ersetzen, nur ein Vorzeichenwechsel, aber keine Wertänderung des Ausdruckes für τ_{xy} ein. Schreiben wir daher jetzt

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xy} &= G\alpha C_1 \cos \alpha y \left(e^{\alpha z} - e^{-\alpha z}\right) \\ \tau_{xz} &= G\left\{\alpha C_1 \sin \alpha y \left(e^{\alpha z} + e^{-\alpha z}\right) - 2cy\right\} \end{aligned}\right\}, \tag{174b}$$

so sind alle verlangten Symmetrieeigenschaften erfüllt, denn $\cos \alpha y$ ist wie verlangt eine gerade Funktion von y und auch τ_{xz} erfüllt die Forderungen, daß es eine gerade Funktion von z und eine ungerade Funktion von y sein soll.

Die Grenzbedingung an den geraden Seitenlinien in Abb. 19 verlangt, daß τ_{xy} für $y = \pm a$ zu Null werden muß bei jedem Werte von z. Daher muß der Winkel αa entweder ein Rechter oder drei Rechte oder fünf Rechte sein usf. Innerhalb dieser

Grenzen können wir daher über die Konstante α noch verfügen, ohne die besprochene Grenzbedingung zu verletzen, d. h. wir können

$$\alpha = (2n+1)\frac{\pi}{2a}$$

setzen, worin n entweder Null ist oder eine beliebige ganze Zahl bedeutet.

Nun bleibt noch die Grenzbedingung an den gekrümmten Teilen der Querschnittsumgrenzung zu erfüllen. Das kann dadurch geschehen, daß wir die genauere Gestalt dieser Grenzlinien so ermitteln, daß die Bedingung für sie erfüllt wird. Nach Gl. (172) muß die Gleichung der Kurve hierfür der Bedingung genügen

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\alpha C_1 \sin \alpha y (e^{\alpha z} + e^{-\alpha z}) - 2cy}{\alpha C_1 \cos \alpha y (e^{\alpha z} - e^{-\alpha z})}. \tag{175}$$

Dieser Gleichung entspricht nur dann eine als Querschnittsbegrenzung brauchbare Kurve, wenn man $\alpha = \frac{\pi}{2a}$ setzt. Für diesen Fall kann aber die Kurve leicht graphisch bestimmt werden, indem man für eine Anzahl von Wertepaaren der yz in der Höhe, die der Querschnitt erhalten soll, den Differentialquotienten $\frac{dz}{dy}$ berechnet, den dadurch gegebenen Neigungswinkel an der Stelle yz in den Querschnitt einträgt und hierauf die Kurve so zieht, daß sie überall in den angegebenen Richtungen weitergeht. Auf diese Weise ist auch die Kurve in Abb. 19 ermittelt worden.

Die Gleichung für $\frac{dz}{dy}$ läßt sich übrigens noch in etwas bequemerer Form anschreiben. Zunächst beachte man, daß die Konstante C_1, wenn auch sonst willkürlich, jedenfalls proportional mit der Konstante c genommen werden muß, denn c bedeutete den auf die Längeneinheit kommenden Torsionswinkel, der proportional mit dem Torsionsmomente anwächst, und auch τ_{xz} wächst proportional mit dem verdrehenden Momente. Man muß daher $\alpha C_1 = cC$ setzen, worin nun C ganz

willkürlich angenommen werden kann. Ferner kann man durch Einführung der hyperbolischen Funktionen, indem man also

$$\tfrac{1}{2}(e^{\alpha z} - e^{-\alpha z}) = \sinh \alpha z; \qquad \tfrac{1}{2}(e^{\alpha z} + e^{-\alpha z}) = \cosh \alpha z$$

setzt, die Gleichung kürzer anschreiben, womit auch bei der Benutzung der für diese Funktionen berechneten Tafeln eine erhebliche Abkürzung der Zahlenrechnungen herbeigeführt wird. Die Gleichung lautet dann

$$\frac{dz}{dy} = \frac{C \sin \frac{\pi}{2} \frac{y}{a} \cdot \cosh \frac{\pi}{2} \frac{z}{a} - y}{C \cos \frac{\pi}{2} \frac{y}{a} \cdot \sinh \frac{\pi}{2} \frac{z}{a}}. \qquad (175\text{a})$$

Die Konstante C ist noch willkürlich und je nach der Wahl, die wir für sie treffen, erhalten wir verschiedene Begrenzungskurven. Indessen darf C nicht zu groß gewählt werden, so nämlich, daß $\frac{dz}{dy}$ jedenfalls negativ bleibt, weil nur auf diese Weise die gewünschte Querschnittsgestalt hervorgeht. Nachdem die Kurve etwa auf zeichnerischem Wege ermittelt ist, findet man die Spannungsverteilung aus den Gleichungen (174b), nachdem man darin $\alpha C_1 = cC$ gesetzt hat. Hiervon ist C schon bei der Konstruktion der Begrenzungskurve willkürlich angenommen worden, während sich die Konstante c nachträglich aus der Bedingung ergibt, daß die Summe der Momente der Spannungen in allen Flächenteilchen des Querschnitts gleich dem gegebenen Torsionsmomente sein muß. Diese ganze Rechnung kann leicht in derselben Art durchgeführt werden, wie dies früher schon bei den einschlägigen Untersuchungen des dritten Bandes geschehen war; es ist daher nicht nötig, hierauf noch näher einzugehen, um so mehr, als der Querschnitt in Abb. 19 ohnehin nur als Vorstufe für den rechteckigen Querschnitt dienen soll.

Nun konnte man zwar durch die Wahl der Konstanten C, die uns überlassen war, schon einen gewissen Einfluß auf die Gestalt der Begrenzungskurve ausüben, für die unsere Lösung Gültigkeit hat. Um die Kurve aber schließlich in eine Gerade

überführen zu können, müssen wir die Zahl der willkürlichen Konstanten, über die wir frei verfügen können, bedeutend zu vermehren suchen. Das ist auch in der Tat leicht möglich. Wir sahen, daß der Ansatz für ξ in Gl. (174a) bei sehr verschiedenen Werten von α nicht nur der Differentialgleichung (170), sondern auch der Grenzbedingung an den geradlinigen Teilen des Umfangs entspricht. Anstatt uns nun, wie bisher, damit zu begnügen, eine der hiernach möglichen Lösungen zu betrachten, können wir jetzt dazu übergehen, ξ aus einer Summe solcher partikulären Lösungen zusammenzusetzen, von denen jede einzelne denselben Forderungen entspricht. Jedes Glied dieser Summe bringt dann eine neue willkürliche Konstante herein, so daß man durch deren passende Bestimmung einer weit größeren Zahl von verschiedenen Grenzkurven zu entsprechen vermag. Wir setzen also jetzt

$$\xi = c\Big\{-yz + C_0 \sin\frac{\pi y}{2a}\sinh\frac{\pi z}{2a} + C_1 \sin 3\frac{\pi y}{2a}\sinh 3\frac{\pi z}{2a} + \cdots + C_n(2n+1)\sin(2n+1)\frac{\pi y}{2a}\sinh(2n+1)\frac{\pi z}{2a} + \cdots\Big\} \tag{176}$$

worin die C beliebige Konstanten sind, während c immer noch den auf die Längeneinheit der Welle bezogenen Verdrehungswinkel angibt und später dementsprechend zu bestimmen ist. Wir wissen nun schon, daß der Ansatz in Gl. (176) sowohl der Differentialgleichung für ξ als auch den Grenzbedingungen an den gradlinigen Teilen des Querschnittsumfangs in Abb. 19 genügt. Für die Schubspannungskomponenten erhält man aus Gl. (176)

$$\tau_{xy} = cG\Big\{C_0\frac{\pi}{2a}\cos\frac{\pi y}{2a}\sinh\frac{\pi z}{2a} + C_1 3\frac{\pi}{2a}\cos 3\frac{\pi y}{2a}\sinh 3\frac{\pi z}{2a} + \cdots\Big\},$$

$$\tau_{xz} = cG\Big\{-2y + C_0\frac{\pi}{2a}\sin\frac{\pi y}{2a}\cosh\frac{\pi z}{2a} + C_1 3\frac{\pi}{2a}\sin 3\frac{\pi y}{2a}\cosh 3\frac{\pi z}{2a} + \cdots\Big\}.$$

Die Zahl der Glieder in diesen Reihen kann nach Belieben endlich oder auch unendlich groß genommen werden. Wenn die Lösung dem Falle des rechteckig begrenzten Querschnitts angepaßt werden soll, muß die Reihe freilich bis ins Unendliche fortgesetzt werden.

In diesem Falle muß nämlich τ_{xz} für $z = \pm b$ bei jedem Werte von y zu Null werden. Die Bedingung dafür lautet demnach

$$\left.\begin{aligned} 2y = C_0 \frac{\pi}{2a} \sin \frac{\pi y}{2a} \cosh \frac{\pi b}{2a} + \\ + C_1 3 \frac{\pi}{2a} \sin 3 \frac{\pi y}{2a} \cosh 3 \frac{\pi b}{2a} + \cdots \end{aligned}\right\} . \quad (177)$$

Auf der rechten Seite steht eine Fouriersche Reihe, die nach dem Sinus der ungeraden Vielfachen des Winkels $\frac{\pi y}{2a}$ fortschreitet. Die Koeffizienten dieser Reihe sind konstante Größen und es handelt sich nun darum, die Konstanten C, die bisher willkürlich geblieben waren, so zu bestimmen, daß die Gleichung erfüllt ist. Nach der Theorie der Fourierschen Reihen kann dies ohne Schwierigkeit geschehen. Für alle Werte von x zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ gilt nämlich, wie aus dieser Theorie bekannt ist und nach ihren Methoden leicht nachgewiesen werden kann, die Entwickelung

$$x = \frac{4}{\pi}\left(\sin x - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \frac{\sin 7x}{7^2} + \cdots\right). \quad (178)$$

Da auch die vorher für y aufgestellte Gleichung nur für Werte von y zwischen 0 und a, oder für Werte des Winkels $\frac{\pi y}{2a}$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ gültig zu sein braucht, können wir die Konstanten C in Gl. (177) unmittelbar durch einen Vergleich mit Gl. (178) entnehmen. Wir finden dann

$$C_0 = \frac{32a^2}{\pi^3 \cosh \frac{\pi b}{2a}}; \qquad C_1 = -\frac{32a^2}{\pi^3 \cdot 3^3 \cosh 3 \frac{\pi b}{2a}}.$$

usf. Setzen wir diese Werte in Gl. (176) ein, so erhalten wir

$$\mathfrak{x} = -cyz + \frac{32a^2}{\pi^3} c \left\{ \frac{\sin \frac{\pi y}{2a} \sinh \frac{\pi z}{2a}}{\cosh \frac{\pi b}{2a}} - \frac{\sin 3\frac{\pi y}{2a} \sinh 3\frac{\pi z}{2a}}{3^3 \cosh 4\frac{\pi b}{2a}} + \right.$$
$$\left. + \frac{\sin 5\frac{\pi y}{2a} \sinh 5\frac{\pi z}{2a}}{5^3 \cosh 5\frac{\pi b}{2a}} \cdots \right\}. \qquad (179)$$

Hiermit ist die Aufgabe im wesentlichen gelöst, bis auf die Ermittelung der Konstanten c, die nachher noch mit Hülfe einer Momentengleichung berechnet werden wird. Die Darstellung von $\mathfrak{x}$ ist auch praktisch insofern ganz brauchbar, als die in der Klammer stehende Reihe schnell genug konvergiert, um die Zahlenrechnung auf die Beibehaltung weniger Glieder beschränken zu können. Als ein Nachteil erscheint in gewisser Hinsicht der Umstand, daß $\mathfrak{x}$ in Gl. (179) von y in anderer Weise abhängig erscheint, als von z. An und für sich ist natürlich die Funktion $\mathfrak{x}$ von beiden Variabeln y und z in derselben Weise abhängig und die abweichende Darstellung in Gl. (179) rührt nur davon her, daß diese Funktion, die sich in geschlossener Form mit Hülfe der in der Analysis gebräuchlichen einfacheren Funktionen nicht ausdrücken läßt, gewissermaßen gewaltsam in die in Abb. (179) gegebene Reihenentwickelung hineingezwungen wurde.

Man kann indessen durch eine einfache Überlegung sofort auch eine zweite Darstellung von $\mathfrak{x}$ finden, in der die Variabeln y und z die Rollen miteinander vertauschen und daraus, wenn man will, auch noch eine dritte Form ableiten, die nach y und z symmetrisch ist. Man denke sich nämlich zu Abb. 18 noch eine zweite Querschnittszeichnung, die aus der ersten dadurch hervorgeht, daß der Querschnitt um einen rechten Winkel im Uhrzeigersinn gedreht ist. Ein Punkt, der vorher die Koordinaten y und z hatte, gelangt dadurch in eine Lage mit den Koordinaten $y' = z$ und $z' = -y$, wenn die Koordinatenachsen der y' und z' in der zweiten Zeichnung dieselbe Richtung haben, wie die der y und z in Abb. 18. Für die

Stelle $y'z'$ läßt sich nun ξ für den zweiten Fall ebenfalls nach Gl. (179) berechnen, wobei man nur a und b zu vertauschen und an Stelle von y und z jetzt y' und z' zu setzen hat. Für die Stelle $y'z'$ muß aber ξ nach Größe und Vorzeichen mit ξ für die Stelle yz in der ersten Lage übereinstimmen, da in beiden Fällen derselbe Punkt des Stabquerschnitts gemeint ist. Ersetzt man daher nachträglich y' durch z und z' durch $-y$, so muß wieder derselbe Wert ξ herauskommen, wie in der ursprünglichen Gleichung (179). Dadurch erhält man für ξ die mit Gl. (179) gleichwertige Darstellung

$$\xi = +cyz - \frac{32b^2}{\pi^3}c\left\{\frac{\sin\frac{\pi z}{2b}\sinh\frac{\pi y}{2b}}{\cosh\frac{\pi a}{2b}} - \frac{\sin 3\frac{\pi z}{2b}\sinh 3\frac{\pi y}{2b}}{3^3\cosh 3\frac{\pi a}{2b}} + \right.$$
$$\left. + \frac{\sin 5\frac{\pi z}{2b}\sinh 5\frac{\pi y}{2b}}{5^3\cosh 5\frac{\pi a}{2b}} \cdots\right\}. \qquad (180)$$

Soll ξ für einen bestimmten Punkt des Querschnitts berechnet werden, so wird man sich jener der beiden Entwickelungen (179) und (180) bedienen, die im gegebenen Falle am schnellsten konvergiert.

Das arithmetische Mittel aus beiden Ausdrücken liefert endlich auch noch eine Form, die nach y und z symmetrisch gebaut ist, die aber für die Zahlenrechnung weniger bequem ist. Daß die Vertauschung von y und z, durch die man aus Gl. (179) zu Gl. (180) gelangt, zu einem Vorzeichenwechsel führt, hängt damit zusammen, daß das Koordinatensystem der XYZ durch eine solche Vertauschung aus einem Rechts- in ein Linkssystem (oder umgekehrt) übergeht oder mit anderen Worten, daß hierdurch auch der Sinn, in dem das Verdrehungsmoment oder der Verdrehungswinkel c positiv zu zählen sind, umgekehrt wird.

§ 26. **Fortsetzung; Berechnung des Verdrehungswinkels.**

Für einen Momentenpunkt, der mit der Querschnittsmitte zusammenfällt, erhält man die Momentengleichung

$$M = \int (\tau_{xy} z - \tau_{xz} y)\, dF, \tag{181}$$

wenn sich die Integration nach dF über die ganze Querschnittsfläche erstreckt und M das als gegeben anzusehende Verdrehungsmoment bedeutet. Setzt man für die Schubspannungskomponenten ihre Werte aus den Gleichungen (171) ein, so geht die Momentengleichung über in

$$M = cG \int (y^2 + z^2)\, dF + G \int \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} z - \frac{\partial \xi}{\partial z} y\right) dF$$

wofür man auch, mit Einführung des polaren Trägheitsmomentes Θ_p des Querschnitts

$$M = cG\Theta_p + G \int \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} z - \frac{\partial \xi}{\partial z} y\right) dF \tag{182}$$

schreiben kann. Diese Gleichung gilt noch für jede beliebige Querschnittsform. Beim kreisförmigen Querschnitt z. B., für den $\xi = 0$ ist, bleibt nur das erste Glied auf der rechten Seite stehen und die Gleichung liefert damit die bekannte Formel für den auf die Längeneinheit bezogenen Verdrehungswinkel c einer kreisförmigen Welle.

In allen anderen Fällen ist aber das zweite Glied auf der rechten Seite beizubehalten. Man kann es noch einer einfachen Umformung unterziehen, indem man z. B.

$$\int \frac{\partial \xi}{\partial y} z\, dF = \int\int \frac{\partial \xi}{\partial y} z\, dy\, dz = \int z\, dz\, (\xi_2 - \xi_1)$$

setzt, wenn unter ξ_1 und ξ_2 die Werte von ξ an jenen Stellen des Umfangs verstanden werden, die auf einer zur Y-Achse parallelen Linie von der Ordinate z liegen. Sollte der Querschnittsumfang von dieser Linie an mehr als zwei Stellen geschnitten werden, so wäre natürlich der Ansatz entsprechend zu erweitern. Hierdurch läßt sich das über die Fläche erstreckte Integral auf ein über den Querschnittsumfang zu nehmendes Integral zurückführen. Für den Fall des rechteckigen Querschnitts soll dies jetzt weiter ausgeführt werden,

Hierbei kann man zur Vereinfachung der Rechnung davon Gebrauch machen, daß die Spannungen in allen vier

Quadranten symmetrisch verteilt sind, so daß es genügt, die Integration über den ersten Quadranten zu erstrecken und das auf diese Weise berechnete Moment mit 4 zu multiplizieren. Setzt man für ξ den aus Gl. (180) für $y = a$ folgenden Wert ein, so erhält man nach Ausführung der Integration nach z

$$\int_0^b z\,\xi_{y=a}\,dz = \frac{cab^3}{3} - \frac{128\,b^4 c}{\pi^5}\left\{\operatorname{tgh}\frac{\pi a}{2b} + \frac{1}{3^5}\operatorname{tgh} 3\frac{\pi a}{2b} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{5^5}\operatorname{tgh} 5\frac{\pi a}{2b} + \cdots\right\}.$$

Ebenso wird, wenn man jetzt ξ aus Gl. (179) einsetzt,

$$\int_0^a\int_0^b \frac{\partial \xi}{\partial z}\,y\,dy\,dz = \int_0^a y\,\xi_{z=b}\,dy$$
$$= -c\frac{ba^3}{3} + \frac{128\,a^4 c}{\pi^5}\left\{\operatorname{tgh}\frac{\pi b}{2a} + \frac{1}{3^5}\operatorname{tgh}\frac{3\pi b}{2a} + \frac{1}{5^5}\operatorname{tgh}\frac{5\pi b}{2a} + \cdots\right\}.$$

Beachtet man noch, daß

$$\Theta_p = \frac{4}{3}(ab^3 + ba^3)$$

gesetzt werden kann, so geht Gl. (183) über in

$$M = cG\left\{\frac{8}{3}(ab^3 + ba^3)\right.$$
$$- \frac{512\,b^4}{\pi^5}\left[\operatorname{tgh}\frac{\pi a}{2b} + \frac{1}{3^5}\operatorname{tgh} 3\frac{\pi a}{2b} + \frac{1}{5^5}\operatorname{tgh} 5\frac{\pi a}{2b} + \cdots\right]$$
$$\left. - \frac{512\,a^4}{\pi^5}\left[\operatorname{tgh}\frac{\pi b}{2a} + \frac{1}{3^5}\operatorname{tgh} 3\frac{\pi b}{2a} + \frac{1}{5^5}\operatorname{tgh} 5\frac{\pi b}{2a} + \cdots\right]\right\}. \quad (183)$$

Aus dieser Gleichung kann der Verdrehungswinkel c, der zu einem gegebenen Momente gehört, sofort berechnet werden. Etwas andere und unter Umständen für die Zahlenrechnung vorteilhaftere Formeln erhält man an Stelle von Gl. (183), wenn man bei den vorhergehenden Ausrechnungen ξ aus Gl. (179) an Stelle von Gl. (180) oder umgekehrt entnimmt. Darauf wird nachher noch näher eingegangen werden.

Für den Fall des quadratischen Querschnitts, also für $a = b$ mag die Zahlenrechnung sofort noch zu Ende geführt werden. Man erhält zunächst aus Gl. (183)

$$M = cG\left\{\frac{16a^4}{3} - \frac{1024a^4}{\pi^5}\left[\operatorname{tgh}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3^5}\operatorname{tgh}\frac{3\pi}{2} + \cdots\right]\right\}.$$

Nun ist $\operatorname{tgh}\pi/2 = 0{,}9171$, während die weiter folgenden tgh sich von der Einheit bis zur vierten Dezimalstelle nicht mehr unterscheiden. Das Glied mit $\operatorname{tgh} 5\pi/2$ braucht schon nicht mehr berücksichtigt zu werden, da es mit $1/5^5$ multipliziert ist. Man findet daher

$$M = cGa^4\left\{\frac{16}{3} - \frac{1024}{\pi^5}\cdot 0{,}9212\right\} = 2{,}281\, cGa^4.$$

Bezeichnet man die Querschnittsseite mit a_1, setzt also $a_1 = 2a$, so wird hiernach der Verdrehungswinkel $\Delta\varphi$ für die Länge l der Welle

$$\Delta\varphi = \frac{Ml}{2{,}281\, G a_1^4}\cdot 16 = 7{,}014\frac{l}{G}\cdot\frac{M}{a_1^4}. \tag{184}$$

Nach der im Band III S. 325 abgeleiteten Näherungsformel tritt an die Stelle von 7,014 der Faktor 7,20, d. h. die Näherungsformel liefert noch eine ziemlich befriedigende Genauigkeit bei ihrer Anwendung auf den quadratischen Querschnitt.

Als zweites Beispiel soll noch ein rechteckiger Querschnitt betrachtet werden, dessen eine Seite, etwa b, bedeutend größer ist, als die andere; so also, daß b etwa mindestens dreimal so groß ist, als a. In diesem Falle ist es bequemer, an Stelle von Gl. (183) eine Entwickelung zu benutzen, die nur nach dem hyperbolischen Tangens der Vielfachen des Winkels $\pi b/2a$ fortschreitet, da für alle diese Winkel tgh genau genug gleich der Einheit gesetzt werden kann. Das kann leicht dadurch geschehen, daß man durch Einsetzen von $\xi_{y=a}$ aus Gl. (179)

$$\int_0^b z\xi_{y=a}dz = -\frac{cab^3}{3} + \frac{32a^2c}{\pi^3}\left\{\frac{2ab}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots\right)\right.$$
$$\left. - \left(\frac{2a}{\pi}\right)^2\left[\operatorname{tgh}\frac{\pi b}{2a} + \frac{1}{3^5}\operatorname{tgh}\frac{3\pi b}{2a} + \frac{1}{5^5}\operatorname{tgh}\frac{5\pi b}{2a} + \cdots\right]\right\}$$

berechnet. Dieser Ausdruck läßt sich noch etwas vereinfachen,

indem nach einer der vielen Reihenentwickelungen, die man für die Größe π aufgestellt hat,

$$\frac{\pi^4}{96} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots$$

gesetzt werden kann, wovon man sich übrigens hier auch durch direkte Berechnung leicht überzeugen kann, da ein strenger Nachweis entbehrlich ist, indem schon eine Übereinstimmung auf wenige Dezimalen für unsere Zwecke genügen würde.

Setzt man dies ein, so geht die vorhergehende Gleichung über in

$$\int_0^b z \xi_{y=a} dz = -\frac{cab^3}{3} + \frac{2ca^3b}{3} - \frac{128a^4c}{\pi^5}\left\{\operatorname{tgh}\frac{\pi b}{2a} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3^5}\operatorname{tgh} 3\frac{\pi b}{2a} + \cdots\right\}.$$

Hiermit wird endlich nach Gl. (182) die dem Werte nach mit Gl. (183) übereinstimmende Formel

$$M = cG\left\{\frac{16}{3}a^3b - \frac{1024a^4}{\pi^5}\left[\operatorname{tgh}\frac{\pi b}{2a} + \frac{1}{3^5}\operatorname{tgh} 3\frac{\pi b}{2a} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{5^5}\operatorname{tgh} 5\frac{\pi b}{2a} + \cdots\right]\right\} \qquad (185)$$

gefunden, die nun zwar nicht mehr symmetrisch nach a und b gebaut, für die Zahlenrechnung aber, namentlich in dem uns jetzt beschäftigenden Falle, weit bequemer ist.

Wenn nämlich b weit größer ist als a, kann, wie schon vorher bemerkt war, jede hyberbolische Tangens in der Formel genau genug gleich der Einheit gesetzt werden. Vernachlässigen wir auch noch das Glied $1/5^5$, so vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\left.\begin{aligned} M &= cG\left\{\frac{16}{3}a^3b - \frac{1024a^4}{\pi^5}\left[1 + \frac{1}{243}\right]\right\} \\ c &= G\{5{,}333a^3b - 3{,}360a^4\} \\ &= cG\frac{16}{3}a^3(b - 0{,}63a). \end{aligned}\right\} \qquad (186)$$

Die zuletzt angeschriebene Form soll den Vergleich mit der im dritten Bande in § 74, Gl. 338 gegebenen Näherungsformel

$$c = \frac{3\,M}{16\,a^3 b\,G}$$

erleichtern. Man sieht, daß in der Tat, wie damals schon angegeben war, der Unterschied nur darin besteht, daß an Stelle von $b - 0{,}63\,a$ in der Näherungsformel b gesetzt ist, was bei einem sehr kleinen Werte von a nicht viel ausmacht. Wenn indessen b nur etwa dreimal so groß wie a sein sollte, tut man natürlich besser, den Verdrehungswinkel c nach der genaueren Formel (186) zu berechnen.

§ 27. Fortsetzung; Berechnung der größten Spannung.

Aus der in § 74 des dritten Bandes angestellten Betrachtung ging schon hervor, daß die größte Spannung im rechteckigen Querschnitte in den Mitten der größeren Umfangseiten auftritt. Das ist also, wenn auch jetzt wieder $b > a$ vorausgesetzt wird, die Spannung τ_{xz} für die Stelle $y = a$, $z = 0$, die nach den vorhergehenden Entwickelungen leicht ausgerechnet werden kann. Zunächst hat man nach Gl. (171)

$$\tau_{max} = G \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)_{a,0} - c\,G\,a$$

wobei durch die Zeiger $a,0$ ausgedrückt werden soll, daß $y = a$ und $z = 0$ in $\partial \xi / \partial z$ einzusetzen ist. Jenachdem man nun $\partial \xi / \partial z$ aus Gl. (179) oder aus Gl. (180) entnimmt, erhält man zwei verschiedene Formeln für denselben Wert: nämlich, wie die einfache Ausrechnung lehrt, auf Grund von Gl. (179)

$$\tau_{max} = -\,2\,c\,G\,a + c\,G\,a\,\frac{16}{\pi^2}\left\{\frac{1}{\cosh\frac{\pi b}{2a}} + \frac{1}{3^2\cosh 3\frac{\pi b}{2a}} + \frac{1}{5^2 \cosh 5\frac{\pi b}{2a}} + \cdots\right\} \qquad (187)$$

und auf Grund von Gleichung (180)

$$\tau_{\max} = - cGb\frac{16}{\pi^2}\left\{\operatorname{tgh}\frac{\pi a}{2b} - \frac{1}{3^2}\operatorname{tgh} 3\frac{\pi a}{2b} + \frac{1}{5^2}\operatorname{tgh} 5\frac{\pi a}{2b} - \cdots\right\}. \qquad (188)$$

Für die Zahlenrechnung verdient Gl. (187) den Vorzug, da die in ihr vorkommende Reihe weit schneller konvergiert, als die in Gl. (188).

Für den quadratischen Querschnitt erhält man nach Gl. (187)

$$\tau_{\max} = -2cGa + cGa\frac{16}{\pi^2}\left\{\frac{1}{2{,}509} + \frac{1}{9.55{,}665} + \frac{1}{25.1290} + \cdots\right\}.$$

Das dritte Glied in der Klammer ist schon so klein, daß es nicht mehr berücksichtigt zu werden braucht. Die weitere Ausrechnung liefert dann

$$\tau_{\max} = -1{,}351\, cGa.$$

Das Minuszeichen hat in dieser Gleichung natürlich keine Bedeutung, da es nur von der an sich willkürlichen Vorzeichenfestsetzung für M und c abhängt. Setzt man nun nachträglich noch den schon im vorigen Paragraphen festgestellten Wert von c ein, so erhält man schließlich vom Vorzeichen abgesehen,

$$\tau_{\max} = \frac{1{,}351\, M}{2{,}281\, a^3} = 0{,}592\frac{M}{a^3} = 4{,}74\frac{M}{a_1{}^3}, \qquad (189)$$

wenn wieder unter $a_1 = 2a$ die ganze Querschnittsseite verstanden wird. Nach der in § 59 des dritten Bandes besprochenen gewöhnlichen Näherungstheorie, würde nach Gl. (238), S. 319 für den quadratischen Querschnitt

$$\tau_{\max} = \frac{9M}{2a_1{}^3} = 4{,}50\frac{M}{a_1{}^3},$$

was in der Tat von dem genaueren Werte in der vorstehenden Gl. (189) nicht viel abweicht.

Für ein Flacheisen endlich, d. h. für einen Querschnitt bei dem b weit, und zwar mindestens etwa dreimal größer ist

als a, genügt es, wenn man in Gl. (187) nur das erste Glied der Reihe beibehält, da das nächste schon einen ganz unerheblichen Wert annimmt. Ferner kann man auch noch für einen Wert x, der mindestens gleich $3\pi/2$ ist, $\cosh x$ genau genug durch die Hälfte von e^x ersetzen. Man erhält daher für diesen Fall zunächst

$$\tau_{\max} = -2cGa + cGa\frac{32}{\pi^2}e^{-\frac{\pi b}{2a}}.$$

Wenn z. B. $b = 3a$ ist, wird dies

$$\tau_{\max} = -2cGa + 0{,}029\,cGa = -1{,}971\,cGa,$$

d. h. das letzte Glied macht schon kaum mehr etwas aus und wenn b noch größer wird, genügt es,

$$\tau_{\max} = -2cGa$$

zu setzen. Hier ist noch der Wert von c aus Gl. (186) einzusetzen, womit die Gleichung, mit Unterdrückung des hier bedeutungslosen negativen Vorzeichens, übergeht in

$$\tau_{\max} = \frac{3M}{8a^2(b-0{,}63a)} \tag{190}$$

Vernachlässigt man hier außerdem noch $0{,}63a$ gegen b (wozu freilich, nachdem die einfache Formel (190) aufgestellt ist, eigentlich kein Grund mehr vorliegt), so kommt man wieder auf die schon im dritten Bande, Gl. (337), S. 399 aufgestellte Näherungsformel zurück.

§ 28. Der regelmäßig dreieckige Querschnitt.

Ganz besonders einfach gestaltet sich die genaue Theorie der Torsion für einen Stab, dessen Querschnitt ein gleichseitiges Dreieck bildet. Setzt man nämlich

$$\xi = C(z^3 - 3y^2z), \tag{191}$$

worin C eine Konstante bedeutet, so erkennt man nach Bilden

der Differentialquotienten, daß dieser Ausdruck der Differentialgleichung (170)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = 0$$

genügt. Ähnlich einfach gebaute Ausdrücke, die dieser Bedingung genügen, lassen sich, wie schon im dritten Bande gezeigt war, noch in großer Zahl angeben und alle entsprechen sie der Lösung des Torsionsproblems für einen in bestimmter Weise gestalteten Querschnitt. Der Ansatz in Gl. (191) hat aber vor den anderen den Vorzug, daß er sich auf einen sehr einfach gestalteten Querschnitt, nämlich auf ein gleichseitiges Dreieck bezieht.

Um dies nachzuweisen, bilden wir die Schubspannungskomponenten nach den Gleichungen (171) nämlich

$$\tau_{xy} = G(-6\,Cyz + cz)$$
$$\tau_{xz} = G(3\,C(z^2 - y^2) - cy).$$

Aus der ersten dieser Gleichungen erkennt man, daß τ_{xy} für jeden Wert von z zu Null wird, wenn man

$$y = \frac{c}{6\,C} = a$$

setzt, wobei unter a eine neu eingeführte Konstante zu verstehen ist. Mit a an Stelle von C schreiben sich die vorhergehenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xy} &= c\,G z \frac{a - y}{a} \\ \tau_{xz} &= cG \frac{z^2 - y^2 - 2ay}{2a} \end{aligned}\right\}. \tag{192}$$

Für jeden Punkt des Querschnittsumfangs muß daher nach Gl. (172) die Beziehung

$$\frac{z^2 - y^2 - 2ay}{2z(a - y)} = \frac{dz}{dy} \tag{193}$$

bestehen. Soll nun der Querschnittsumfang aus geraden Linien gebildet sein, von denen eine die Gleichung

$$z = my + n$$

hat, so muß die vorige Gleichung, wenn man dies einsetzt, identisch, d. h. für jeden Wert von y erfüllt sein. Das liefert

$$(my+n)^2 - y^2 - 2ay = 2m(my+n)(a-y)$$

und hiernach, wenn man die Koeffizienten gleicher Potenzen von y einander gleich setzt,

$$m^2 - 1 = -2m^2 \quad \text{oder} \quad m = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$2mn - 2a = 2m(am-n) \quad \text{oder} \quad n = \frac{2a}{3m} = \pm 2a\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$n^2 = 2amn.$$

Die letzte Gleichung ist nach Einsetzen von m und n aus den beiden ersten von selbst erfüllt. Die Grenzbedingung wird daher erfüllt längs der beiden Geraden

$$z = +y\sqrt{\frac{1}{3}} + 2a\sqrt{\frac{1}{3}} \quad \text{und} \quad z = -y\sqrt{\frac{1}{3}} - 2a\sqrt{\frac{1}{3}}\,\cdot$$

die symmetrisch zur Y-Achse liegen, durch den Punkt $y = -2a$ der Y-Achse gehen und mit der Y-Achse Winkel von 30^0 einschließen. Außerdem ist aber die Grenzbedingung auch noch längs der parallel zur Z-Achse gehenden Geraden $y = a$ erfüllt, worauf vorher schon aufmerksam gemacht war, indem dort $dz/dy = \infty$ wird.

Die drei Geraden schließen das in Abb. 20 gezeichnete regelmäßige Dreieck miteinander ein, auf das sich demnach die vorher gegebene Lösung des Torsionsproblems bezieht. Bezeichnet man die Dreieckseite mit s, so wird

$$a = \frac{s}{2\sqrt{3}}\,\cdot$$

Gl. (193) bildet übrigens zugleich auch die Differentialgleichung der Spannungslinien, d. h. der Linien, die man erhält, wenn man überall in der Richtung der resultierenden Schubspannung im Querschnitte fortschreitet. Sie läßt sich auch leicht allgemein integrieren, indem man sie auf die Formen

$$z^2dy - (y^2 + 2ay)dy = 2zdz(a-y)$$

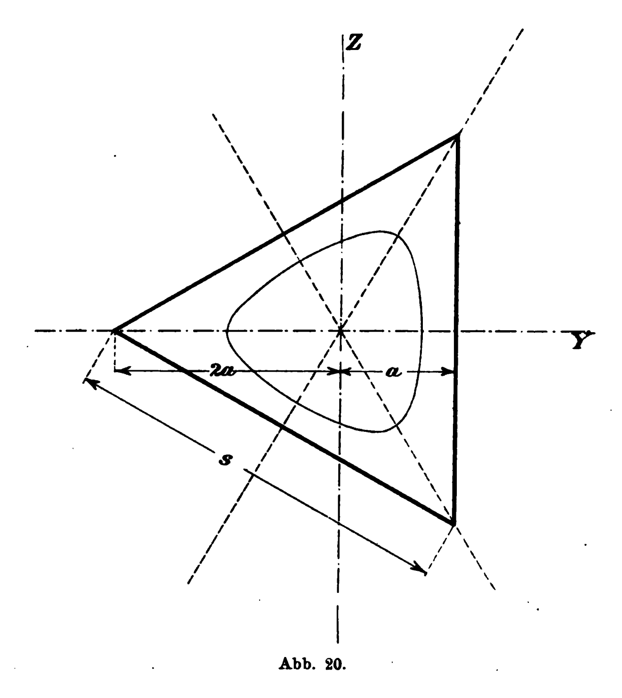


Abb. 20.

$$z^2 dy + (y - a) d(z^2) = (y^2 + 2ay) dy$$
$$d(z^2 (y - a)) = (y^2 + 2ay) dy$$

bringt, wonach das allgemeine Integral

$$z^2 = \frac{\frac{y^3}{3} + ay^2 + C}{y - a} = \frac{1}{3}(y + 2a)^2 + \frac{\frac{4a^3}{3} + C}{y - a} \tag{194}$$

lautet. Jedem Werte von C entspricht eine bestimmte Spannungslinie; doch darf C nicht kleiner genommen werden, als $-4a^3/3$, welcher Wert dem Querschnittsumfange entspricht und nicht größer als Null, welcher Wert der sich auf einen einzigen Punkt zusammenziehenden innersten Spannungslinie entspricht. Eine dieser Spannungslinien, die zu dem Werte $C = -2a^3/3$ gehört, ist in Abb. 20 eingetragen. Sie hat, wie jede andere und wie der Querschnitt selbst, drei sich unter 60^0 schneidende Symmetrieachsen.

Zur Berechnung des Verdrehungswinkels c dient wieder eine auf den Mittelpunkt bezogene Momentengleichung. Dabei ist zur Vereinfachung der Rechnung zu beachten, daß der Querschnitt durch die drei Symmetrieachsen in sechs kongruente Teile zerlegt wird, in denen gleiche Spannungszustände auftreten, so daß es genügt, das Moment der Spannungen für einen dieser Teile zu berechnen und hierauf mit sechs zu multiplizieren.

Bedient man sich der im Anschlusse an Gl. (182) in § 26 besprochenen Berechnungsweise, so findet man zunächst nach einfacher Ausrechnung für das über ein Sechstel der Fläche erstreckte Integral

$$\int\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} z - \frac{\partial \xi}{\partial z} y\right) dF = -\frac{ca^4\sqrt{3}}{5}.$$

Für das polare Trägheitsmoment Θ_p des ganzen Dreiecks findet man leicht

$$\Theta_p = 3a^4\sqrt{3}$$

und Gleichung (182) geht, wenn man diese Werte einsetzt, über in

$$M = cG\left(3a^4\sqrt{3} - 6\frac{a^4\sqrt{3}}{5}\right) = cGa^4\frac{9\sqrt{3}}{5}.$$

Gewöhnlich ist es bequemer, an Stelle von a die Dreieckseite s einzuführen. Tut man dies und löst nach c auf, so erhält man für den Verdrehungswinkel

$$c = \frac{80\,M}{Gs^4\sqrt{3}}. \tag{195}$$

Die größte Spannung $\tau_{\max}$ tritt wieder, wie schon aus dem hydrodynamischen Gleichnisse zu entnehmen ist, in den Seitenmitten auf, d. h. man hat

$$\tau_{\max} = (\tau_{xz})_{y=a,\, z=0}$$

oder wenn man τ_{xz} aus Gl. (192) einsetzt,

$$\tau_{\max} = -\frac{3}{2}cGa.$$

Unterdrückt man wieder das negative Vorzeichen, setzt c aus Gl. (195) ein und drückt a in s aus, so geht dies über in

$$\tau_{\max} = \frac{20\,M}{s^3}. \tag{196}$$

Dabei ist wohl zu beachten, daß diese überaus einfache Formel nicht etwa eine Näherungsformel ist, sondern strenge Gültigkeit hat.

Schließlich mag noch bemerkt werden, daß die hier besprochene Lösung ohne weiteres auch auf einen Querschnitt übertragen werden kann, der nicht mehr dreieckig, sondern nach außen hin durch eine der vorher besprochenen Spannungslinien, also etwa durch die in Abb. 20 eingezeichnete begrenzt ist. Auch auf einen hohlen Querschnitt, der nach außen hin dreiseitig, nach innen hin durch eine solche Spannungslinie begrenzt ist, läßt sich die Lösung sofort anwenden. Man muß dann nur bei der Aufstellung der Momentengleichung zur Berechnung des Verdrehungswinkels die Integrale über die betreffende Querschnittsfläche erstrecken.

Übrigens gilt dies ganz allgemein: immer, wenn man für einen bestimmten Querschnitt eine Lösung gefunden hat, läßt sie sich auch auf einen Querschnitt übertragen, der innerhalb des ersten zwischen irgend zwei Spannungslinien enthalten ist. Das geht daraus hervor, daß zwischen dem durch diese beiden Spannungslinien abgegrenzten Teile und dem Reste des ganzen Stabes überhaupt keine Spannungen übertragen werden. Hat man eine Anzahl von Spannungslinien in den Querschnitt eingetragen, so wird durch sie der ganze Stab in eine Reihe von Schichten zerlegt, von denen jede unabhängig von den andern den auf sie treffenden Teil des Torsionsmoments über die ganze Stablänge hin überträgt.

§ 29. Behandlung des Torsionsproblems mit Hülfe einer Spannungsfunktion.

Gewöhnlich untersucht man die Verdrehungsbeanspruchung eines prismatischen Stabes in der Weise, wie es bisher be-

sprochen war, also so, daß man zuerst die Spannungskomponenten τ_{xy} und τ_{xz} in der Verschiebungskomponente ξ ausdrückt, hierauf diese auf Grund der ihr auferlegten Bedingungen ermittelt und zuletzt daraus die Spannungen selbst berechnet. In gewisser Hinsicht ist dies ein Umweg, den man auch vermeiden kann, indem man die Spannungen, ähnlich wie es bei der Theorie der Scheiben im vorigen Abschnitte geschehen war, in einer Spannungsfunktion ausdrückt und diese unmittelbar aufsucht. Dieser Weg soll jetzt eingeschlagen werden.

Hierzu ersetzen wir die Gleichungen (171)

$$\tau_{xy} = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + cz\right); \qquad \tau_{xz} = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - cy\right)$$

durch die folgenden

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial F}{\partial z}; \qquad \tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y} \tag{197}$$

worin F eine Funktion von y und z ist, die wir als eine Spannungsfunktion bezeichnen können, obschon sie mit der früher gebrauchten Airyschen Spannungsfunktion nicht verwechselt werden darf.

Die Bedingung dafür, daß der Ansatz in Gl. (197) überhaupt möglich ist, besteht in der Gleichung

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}$$

wofür man auch beim Einsetzen von τ_{xy} und τ_{xz} aus den Gleichungen (171)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = 0$$

schreiben kann. Diese Bedingung ist aber nach Gl. (170) in der Tat erfüllt, womit zunächst die Zulässigkeit des Ansatzes (197) erwiesen ist. Freilich ersetzen die Gleichungen (197) bis jetzt die Gleichungen (171) noch nicht vollständig. Rein für sich betrachtet, sagten nämlich die Gleichungen (171) nur aus, daß τ_{xy} und τ_{xz} in den Differentialquotienten irgend einer gewissen Funktion ξ in der dort näher angegebenen Weise ausgedrückt werden können. Die Bedingung dafür, daß dies

möglich sei, besteht aber darin, daß man aus den beiden Gleichungen (171) zu demselben Ausdrucke für den zweiten Differentialquotienten $\partial^2 \xi / \partial y \partial z$ gelangt. Von diesem Gesichtspunkte aus bildet daher den Ersatz für die Gleichungen (171) die folgende Gleichung

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} - cG = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} + cG,$$

wofür man durch Einführung von F aus den Gleichungen (197)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = -2cG \qquad (198)$$

erhält. Das ist die Differentialgleichung, der die Spannungsfunktion des Torsionsproblems genügen muß. Durch sie ist F noch nicht vollständig bestimmt; erst durch das Hinzutreten der Grenzbedingungen am Querschnittsumfange wird sie bis auf eine willkürliche Konstante, auf die es nicht ankommt, bestimmt. Die Grenzbedingung besteht wieder darin, daß die resultierende Schubspannung überall am Querschnittsumfange tangential gerichtet sein muß, d. h. daß

$$\frac{\tau_{xz}}{\tau_{xy}} = \frac{dz}{dy} \qquad (199)$$

sein muß. Drückt man hier τ_{xy} und τ_{xz} nach den Gl. (197) in F aus, so geht die Grenzbedingung für den Umfang über in

$$\frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0. \qquad (200)$$

Auf der linken Seite steht die Änderung, die F erfährt, wenn man um dy und dz in den beiden Achsenrichtungen fortschreitet und die Bedingung, daß diese Änderung für ein Fortschreiten auf dem Umfange Null sein soll, läßt sich daher auch dahin ausdrücken, daß die Spannungsfunktion für alle Punkte des Umfangs irgend einen bestimmten konstanten Wert behalten muß.

Die Grenzbedingungen am Umfange gestalten sich daher bei der Untersuchungsmethode, die die Spannungsfunktion in den Mittelpunkt der Betrachtung stellt, ganz besonders einfach und hierauf beruht, ganz ebenso wie bei dem Gebrauche, den wir im zweiten Abschnitte von der Airyschen Spannungsfunktion gemacht hatten, der

Vorteil des Verfahrens. Dieser Vorteil macht sich namentlich dann geltend, wenn die Gleichung des Querschnittsumrisses

$$f(yz) = 0$$

einer Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -K$$

genügt; worin K eine Konstante ist. Denn in diesem Falle, der z. B. beim elliptischen Querschnitt und auch sonst noch öfters vorliegt, braucht man nur

$$F = \frac{2cG}{K} f(yz) + \text{Konst}$$

zu setzen, um die vollständige Lösung des Torsionsproblems zu erhalten.

Gl. (199) gilt übrigens, wie aus ihrer geometrischen Bedeutung hervorgeht, nicht nur für den Querschnittsumriß, sondern auch für jede Spannungslinie, die man in den Querschnitt eintragen kann. Daher ist auch Gl. (200) für ein Fortschreiten längs irgend einer Spannungslinie erfüllt, d. h. für jede Spannungslinie hat F einen bestimmten konstanten Wert.

Trägt man wieder, wie es früher mit der Airyschen Spannungsfunktion geschehen war, jedes F als eine Ordinate senkrecht zur Querschnittsfläche in dem zugehörigen Punkte yz ab, so gelangt man zur Spannungsfläche des Torsionsproblems. Durch Ebenen parallel zur Querschnittsebene wird die Spannungsfläche nach Linien geschnitten, für die F konstant ist. Projiziert man daher diese Linien durch rechtwinklige Projektionsstrahlen auf die Querschnittsfläche, so erhält man Spannungslinien. Man kann auch sagen, daß die Spannungslinien die Schichtenlinien der Spannungsfläche bilden, wenn man diese Fläche so wie einen Gebirgszug in einer Landkarte durch Linien gleicher Höhe wiedergibt.

Bei dieser anschaulichen Darstellung, die man L. Prandtl verdankt, entspricht das Gefäll des Hügels, der von der Spannungsfläche gebildet wird, an jeder Stelle

der Größe der an dieser Stelle auftretenden Schubspannung. Das Gefäll des Hügels von der Ordinate F, also die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels einer senkrecht zu den Linien gleicher Höhe gezogenen Tangente wird nämlich, wie eine einfache geometrische Betrachtung lehrt, durch den Ausdruck

$$\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}$$

angegeben, der bei der durch die Gleichungen (197) ausgesprochenen Bedeutung von F in

$$\sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}$$

übergeht, also nach dem Pythagoräischen Lehrsatze den Absolutbetrag der resultierenden Schubspannung im Punkte yz angibt.

Wählt man bei einem einfach zusammenhängenden Querschnitte die in dem Ausdrucke von F willkürlich bleibende Konstante so, daß F für den Umfang zu Null wird, so sitzt der von der Spannungsfläche gebildete Hügel unmittelbar auf der Querschnittsebene auf und das von ihm eingenommene Volumen ist der Torsionssteifigkeit des Stabes proportional. Um dies nachzuweisen, gehe man auf die Momentengleichung (Gl. (181), S. 157)

$$M = \int (\tau_{xy} z - \tau_{xz} y) dF$$

zurück, die sich hier mit Rücksicht auf die Gleichungen (197) in der Form

$$M = -\int\int \left(\frac{\partial F}{\partial y} y + \frac{\partial F}{\partial z}\right) dy\, dz$$

anschreiben läßt. Beachtet man nun, daß sich

$$\int\int \frac{\partial F}{\partial y} y\, dy\, dz = \int\int \frac{\partial}{\partial y}(Fy)\, dy\, dz - \int\int F\, dy\, dz$$
$$= \int dz (F_2 y_2 - F_1 y_1) - \int\int F\, dy\, dz$$

setzen läßt und daß die Werte F_1 und F_2, die sich auf den

Querschnittsumfang beziehen, gemäß der von uns vorher für die Konstante in F getroffenen Wahl zu Null werden, so vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\int\int \frac{\partial F}{\partial y} y\, dy\, dz = -\int\int F\, dy\, dz.$$

Dieselbe Umformung läßt sich auch mit dem andern Gliede in der Momentengleichung vornehmen und im ganzen erhält man damit

$$M = 2\int\int F\, dy\, dz. \tag{201}$$

Das rechts stehende Integral gibt aber das Volumen des Spannungshügels an, womit die Behauptung bewiesen ist.

Für mehrfach zusammenhängende Querschnitte, also für hohle Stäbe läßt sich die Betrachtung in leicht ersichtlicher Weise ergänzen, worauf jetzt nicht weiter eingegangen zu werden braucht.

§ 30. Die experimentelle Lösung des Torsionsproblems.

Die vorhergehenden Betrachtungen erlangen eine besondere Bedeutung durch den Umstand, daß sich die Spannungsfläche, wie L. Prandtl ebenfalls nachgewiesen hat, für jede beliebige Querschnittsform durch einen einfachen Versuch ermitteln läßt, so daß man das Torsionsproblem auch für solche Querschnitte, bei denen die Rechnung versagt, weil sie viel zu umständlich würde, wenn auch nicht genau, aber doch mit vollständig genügender Annäherung lösen kann.

Diese Lösung beruht auf dem Nachweise, daß die gekrümmte Fläche, in die eine an den Rändern festgehaltene, vorher ebene Haut (etwa eine Seifenhaut, wie sie bei den Seifenblasen vorkommt) infolge eines auf der einen Seite wirkenden Luftüberdruckes übergeht, mit der Spannungsfläche des Torsionsproblems zusammenfällt. Man denke sich nämlich aus einem ebenen Bleche ein Loch ausgeschnitten von der Gestalt des Querschnitts, für den das Torsionsproblem gelöst werden soll und in dem Loche zwischen den Rändern eine Haut aus Seifenlösung ausgespannt. Diese Haut bleibt eben,

so lange der Luftdruck auf beiden Seiten gleich ist. Wenn aber das Blech, in dem die Haut ausgespannt ist, den Deckel eines Gefäßes bildet, in dem man den Luftdruck etwas erhöht oder erniedrigt, wölbt sich die Haut und ihre Fläche gibt unter der Voraussetzung, daß die Auswölbung als klein im Verhältnisse zu den Längenabmessungen des Querschnitts betrachtet werden kann, zugleich die gesuchte Spannungsfläche an.

Eine Haut, wie wir sie hier betrachten, hat keine Biegungssteifigkeit und auch ihre Spannung wird durch die Auswölbung nicht oder wenigstens nicht merklich geändert. Bei der Seifenhaut handelt es sich dabei um die durch die Kapillarkräfte hervorgebrachte Oberflächenspannung der Flüssigkeit, die bei der gekrümmten Haut für jede Stelle und nach allen Richtungen hin ebensogroß bleibt, wie bei der ebenen Haut. Aber auch bei einer tierischen Haut, die wie ein Trommelfell ausgespannt ist, macht die elastische Dehnung, die mit einer Auswölbung verbunden ist, so wenig aus gegenüber der Dehnung, die von der ursprünglichen Ausspannung des Felles über der Öffnung herrührt, daß man die Spannungen vor und nach der Auswölbung nach allen Richtungen hin als unveränderlich ansehen kann. Dabei wird natürlich vorausgesetzt, daß das Trommelfell beim Ausspannen ziemlich stark und nach allen Richtungen hin gleichmäßig angezogen wurde.

Hinsichtlich dieser Unabhängigkeit der Spannung von der Ausbiegung unterscheidet sich der Fall, mit dem wir es jetzt zu tun haben, sehr wesentlich von der in § 24 des vorigen Abschnitts behandelten „dünnen Platte mit großer Ausbiegung“. Damals wurde vorausgesetzt, daß die Platte im unbelasteten Zustande nicht angespannt sein sollte, so daß die in ihr auftretenden Spannungen ausschließlich von der Ausbiegung herrührten, während jetzt umgekehrt eine verhältnismäßig große Anfangsspannung vorausgesetzt wird, die durch die Ausbiegung entweder überhaupt nicht oder doch wenigstens nicht merklich geändert werden kann.

Die Differentialgleichung der gekrümmten Fläche, in die die Mittelebene einer solchen Haut unter dem Einflusse eines

konstanten Überdruckes p von der einen Seite her übergeht, läßt sich für den vorher schon vorausgesetzten Fall, daß die Ausbiegungen w senkrecht zur Plattenebene klein bleiben im Verhältnisse zu den Abmessungen der Randlinie, durch eine einfache Betrachtung im Anschlusse an Abb. 21 ableiten.

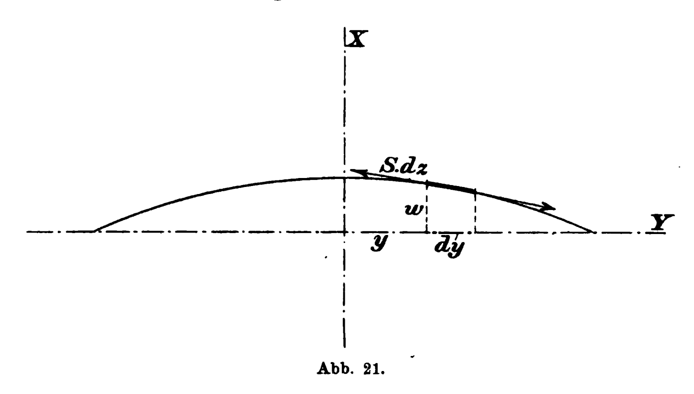


Abb. 21.

In dieser Abbildung ist ein Schnitt durch die Haut parallel zur XY-Ebene angegeben. Die YZ-Ebene fällt mit der Ebene zusammen, in der die Haut ursprünglich ausgespannt war. Man betrachte ein Hautelement, dessen Projektion auf die YZ-Ebene ein Rechteck von den Seiten dy und dz bildet. An der parallel zur XZ-Ebene gehenden Kante dieses Hautelementes mit der Abszisse y greift die in die Abbildung eingetragene Spannung Sdz an. Unter S ist dabei die auf die Längeneinheit eines Schnittes entfallende Spannung zu verstehen, so daß also nach dem, was vorher darüber gesagt war, S als eine Konstante zu betrachten ist. Die Spannung Sdz hat eine Komponente in der Richtung der X-Achse, die bei kleiner Ausbiegung der Haut gleich

$$- S\,dz \frac{\partial w}{\partial y}$$

gesetzt werden kann. Auf der gegenüberliegenden Kante mit der Abszisse $y + dy$ tritt ebenfalls eine Zugspannung von der Größe Sdz auf. Deren in der X-Richtung gehende Komponente, die der vorigen entgegengesetzt gerichtet ist, unter-

scheidet sich von dieser der Größe nach um ein Differential, weil die Neigung der Tangente an der Stelle $y + dy$ von der an der Stelle y etwas verschieden ist. Die algebraische Summe beider Komponenten wird daher gleich

$$S\,dz \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\,dy.$$

Wenn die positiven Achsenrichtungen so gewählt sind, wie aus Abb. 21 hervorgeht, hat $\partial^2 w/\partial y^2$ und hiermit der vorhergehende Ausdruck überall einen negativen Wert. Er gibt daher die algebraische Summe beider X-Komponenten auch dem Vorzeichen nach richtig an, indem jenen Komponenten, die im Sinne der positiven X-Achse gehen, das positive Vorzeichen beizulegen ist.

An den beiden andern Kanten des rechteckigen Hautelementes greifen Zugspannungen von der Größe $S\,dy$ an, deren X-Komponenten ebenso wie vorher ausgedrückt werden können und die algebraische Summe

$$S\,dy \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\,dz$$

liefern. Dann wirkt noch auf die Fläche $dy\,dz$ des Hautelements als Belastung der Luftüberdruck $p\,dy\,dz$ im Sinne der positiven X-Achse. Das Gleichgewicht gegen Verschieben im Sinne der X-Achse erfordert, daß die algebraische Summe aller in dieser Richtung gehenden Kräfte zu Null wird. Das liefert nach Wegheben des gemeinschaftlichen Faktors $dy\,dz$ die gesuchte Differentialgleichung, nämlich

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{p}{S} = 0. \qquad (202)$$

Zur näheren Bestimmung von w tritt dann noch die Grenzbedingung, daß w überall am Umfange zu Null werden muß.

Wie man sieht, stimmt aber Gl. (202) vollständig mit der Differentialgleichung (198, S. 170) für die Spannungsfläche überein, falls man dafür sorgt, daß zwischen den Konstanten die Beziehung

$$2cG = \frac{p}{S} \tag{203}$$

erfüllt wird. Da auch die Grenzbedingungen am Umfange mit einander übereinstimmen, fallen daher beide Flächen in der Tat miteinander zusammen, womit die am Eingange des Paragraphen aufgestellte Behauptung erwiesen.

Auch diese Betrachtung läßt sich ohne weiteres auf den Fall übertragen, daß der Querschnitt hohl ist, wovon aber jetzt abgesehen werden soll.

§ 31. Die Torsion von runden Stäben mit veränderlichem Durchmesser.

Der häufigst vorkommende Fall der Torsion eines Stabes von zylindrischer Gestalt ist zugleich der einfachste. In diesem Falle bleibt jeder Querschnitt eben und er dreht sich ohne Formänderungen in der Querschnittsebene um einen gewissen Winkel, den Verdrehungswinkel. Bei den prismatischen Stäben von beliebigem Querschnitt, die wir bisher betrachtet haben, ist die Formänderung weniger einfach, als bei den zylindrischen Stäben, insofern sich die Querschnitte krümmen. Diese Krümmung wird durch die Verschiebung ξ in der Richtung der Stabachse hervorgebracht. Dagegen befolgen die Verschiebungen $\eta\zeta$ parallel zur Querschnittsebene noch dasselbe einfache Gesetz wie beim zylindrischen Stabe, indem sie einer einfachen Drehung des Querschnitts um den Torsionswinkel entsprechen. Zieht man also innerhalb des Querschnitts vor der Verdrehung irgend eine gerade Linie, so liegen zwar, wegen der Verschiebungen ξ die durch diese Linie verbundenen Teilchen nach der Verdrehung auf einer Kurve; aber die Projektion dieser Kurve auf die YZ-Ebene ist auch nach der Verdrehung noch eine Gerade. Man kann sich mit anderen Worten den Endzustand auch dadurch herbeigeführt denken, daß der Querschnitt zuerst ohne Formänderungen innerhalb der Querschnittsebene um den Verdrehungswinkel gedreht wird, worauf man nur noch die Verschiebungen ξ senkrecht zur Querschnitts-

ebene folgen zu lassen braucht, die bei allen Querschnitten in derselben Weise vor sich gehen. Der ganze Vorgang der Formänderung unterscheidet sich daher von dem des zylindrischen Stabes nur durch das Hinzutreten der Verschiebungen ξ, während er sich im übrigen in derselben einfachen Weise abspielt, wie beim zylindrischen Stabe.

Bei dem Falle, den wir jetzt untersuchen wollen, haben wir es mit einer Verallgemeinerung des Torsionsvorganges für den zylindrischen Stab zu tun, die nach der entgegengesetzten Richtung hin geht, wie bei den prismatischen Stäben. Wir wollen nämlich jetzt den Fall betrachten, daß zwar die Querschnitte bei der Formänderung eben bleiben, ξ also gleich Null ist, während die Verschiebungen $\eta\zeta$ nicht mehr demselben einfachen Gesetze gehorchen, wie beim zylindrischen und dem prismatischen Stabe von beliebigem Querschnitte, so nämlich, daß diese Verschiebungen $\eta\zeta$ zu Verzerrungen innerhalb der Querschnittsebene führen. Denkt man sich also wieder eine gerade Linie im Querschnitt vor der Formänderung gezogen, so erfährt sie eine Krümmung, aber diesmal nicht wegen der Verschiebungen ξ, die vielmehr Null sind, sondern wegen der Verschiebungen $\eta\zeta$ innerhalb der Querschnittsebene.

Es wird sich zeigen, daß der Fall, von dem hier die Rede ist, bei der Verdrehung eines Stabes vorliegt, der die Gestalt eines Umdrehungskörpers hat. Auch dieser Fall ist praktisch genau ebenso wichtig, wie der eines prismatischen Stabes, etwa von rechteckigem Querschnitte und er bedarf daher ebensogut einer näheren Betrachtung. Im Maschinenbau kommt es nämlich häufig vor, daß eine Welle zwar überall kreisförmigen Querschnitt, aber an einzelnen Stellen verschiedene Durchmesser hat. An den Übergangsstellen treten dann höhere Spannungen auf, als sich nach der Theorie der Torsion zylindrischer Stäbe erwarten ließe. Um diese zu ermitteln, oder wenigstens abzuschätzen, muß man von der hier auseinanderzusetzenden Theorie ausgehen.

Um nicht weitläufiger zu werden, als es für den Zweck, den wir jetzt im Auge haben, nötig ist, setze ich weiterhin

voraus, daß der Körper, der die besprochene Gestaltsänderung ausführt, ein Umdrehungskörper sei, der an beiden Endquerschnitten durch Kräftepaare verdreht wird, während am Mantel keine äußeren Kräfte angreifen. Ich kann mich nämlich unter diesen Umständen darauf beschränken, nur eine solche Formänderung zu betrachten, bei der jeder in einem Querschnitte gezogene Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Stabachse liegt, keine Gestaltsänderung bei der Verdrehung erfährt, sondern nur um einen gewissen Winkel um die Stabachse gedreht wird. Der einzige Unterschied gegenüber der Formänderung bei der Verdrehung eines zylindrischen Stabes besteht dann darin, daß jetzt die verschieden großen Kreise, die man vom Mittelpunkt des Querschnitts aus ziehen kann, um verschieden große Winkel gedreht werden, während beim zylindrischen Stabe alle um denselben Winkel, nämlich um den Torsionswinkel gedreht werden. Das hat dann zur Folge, daß jeder Radius bei dem Umdrehungskörper eine Krümmung erfährt, während er beim zylindrischen Stabe geradlinig bleibt.

Daß die in dieser Weise erfolgende Formänderung in der Tat durch die Kräftepaare an den Stabenden hervorgebracht wird, falls auf den Mantel des Stabes keine äußeren Kräfte wirken, muß natürlich erst noch durch die nachfolgende Betrachtung erwiesen werden.

An die Stelle der Gleichungen (169) und (170), S. 145

$$\eta = cxz; \quad \zeta = -cxy; \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = 0,$$

von denen die Theorie der Torsion prismatischer Stäbe ausgeht, setze ich jetzt die Gleichungen

$$\xi = 0; \quad \eta = pz; \quad \zeta = -py. \tag{204}$$

Ferner soll

$$r^2 = y^2 + z^2 \tag{205}$$

gesetzt, also unter r der Abstand irgend eines Punktes xyz von der Stabachse verstanden werden, während unter p irgend

eine zunächst unbekannte Funktion von x und r zu verstehen ist. Durch die Gl. (204) wird der vorher besprochene Formänderungszustand analytisch beschrieben. Irgend ein Kreis vom Halbmesser r, dessen Mittelpunkt auf der Stabachse liegt, dreht sich nach den Gleichungen (204) im Sinne des Uhrzeigers um den Winkel p um die Stabachse.

Wir müssen zunächst zeigen, daß die Gleichungen (204) zu einem möglichen Formänderungszustande führen, d. h. daß die Werte $\xi \eta \zeta$ bei passender Wahl von p den elastischen Grundgleichungen ((32), S. 49) und zwar für $X = Y = Z = 0$, also den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 \xi + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial x} = 0 \\ \nabla^2 \eta + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial y} = 0 \\ \nabla^2 \zeta + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{206}$$

genügen. Wir bilden zunächst

$$e = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = z \frac{\partial p}{\partial y} - y \frac{\partial p}{\partial z} = z \frac{dp}{dr} \frac{\partial r}{\partial y} - y \frac{dp}{dr} \frac{\partial r}{\partial z}.$$

Nach Gleichung (205) ist aber

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad \text{und} \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

und wenn man dies einsetzt geht die vorige Gleichung über in

$$e = 0. \tag{207}$$

Der betrachtete Formänderungszustand ist also mit keiner Volumenänderung weder des ganzen Stabes, noch seiner kleinsten Elemente verbunden. Die Gleichungen (206) vereinfachen sich hiermit zu

$$\nabla^2 \xi = 0; \quad \nabla^2 \eta = 0; \quad \nabla^2 \zeta = 0, \tag{208}$$

von denen die erste wegen $\xi = 0$ ohne weiteres erfüllt ist. Wir bilden jetzt $\nabla^2 \eta$. Zunächst wird nach Gl. (204)

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = z \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

und ferner erhält man der Reihe nach

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = z \frac{\partial p}{\partial y} = z \frac{\partial p}{\partial r} \cdot \frac{y}{r}$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = z \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} \cdot \frac{y^2}{r^2} + \frac{\partial p}{\partial r} \left[\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \right] \right) = z \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^3} \frac{\partial p}{\partial r} \right)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} = p + z \frac{\partial p}{\partial z} = p + z \frac{\partial p}{\partial r} \cdot \frac{z}{r}$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial r} \cdot \frac{z}{r} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} \cdot \frac{z^3}{r^2} + \frac{\partial p}{\partial r} \left(\frac{2z}{r} - \frac{z^3}{r^3} \right)$$

$$= z \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} \frac{z^2}{r^2} + \frac{3r^2 - z^2}{r^3} \frac{\partial p}{\partial r} \right).$$

Setzt man diese Differentialquotienten in die Gleichung $\nabla^2 \eta = 0$ ein, so geht sie über in

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = 0. \qquad (209)$$

Dieser Gleichung muß daher die bisher unbestimmt gelassene Funktion p von x und r jedenfalls genügen, damit der Ansatz in Gl. (204) zulässig sei.

In derselben Weise hat man jetzt die Differentialquotienten von ζ zu bilden und sie in die Gleichung $\nabla^2 \zeta = 0$ einzusetzen. Diese Rechnung spielt sich genau nach dem Muster der vorher ausführlich angeschriebenen ab und führt zu derselben Gleichung (209). Es ist hiermit bewiesen, daß den elastischen Grundgleichungen durch den Ansatz (204) genügt wird, falls p die durch Gl. (209) ausgesprochene Bedingung erfüllt. Unsere Aufgabe ist daher jetzt darauf zurückgeführt, eine Lösung von Gl. (209) zu suchen, die zugleich den Grenzbedingungen am Mantel und an den Endquerschnitten des Stabes genügt.

Da sich die Grenzbedingungen auf die Kräfte beziehen, die an diesen Stellen angreifen, wollen wir vor allem den Spannungszustand betrachten, der mit dem durch die Gl. (204) ausgesprochenen Formänderungszustande verbunden ist. Dazu stützen wir uns auf die Gleichungen (27) und (28), S. 48. Aus der ersten der Gleichungen (27) folgt zunächst wegen $\xi = 0$ und mit Rücksicht auf Gl. (207)

$$\sigma_x = 0$$

d. h. in jedem Querschnitte treten nur Schubspannungen und keine Normalspannungen auf. Für die Schubspannungen erhält man nach den Gleichungen (28) hier

$$\tau_{xy} = Gz\frac{\partial p}{\partial x}; \qquad \tau_{xz} = -Gy\frac{\partial p}{\partial x} \tag{210}$$

d. h. die Schubspannungen stehen im Querschnitt überall rechtwinklig zum Radius und haben im Abstande r die Größe $Gr\,\partial p/\partial x$. Da im allgemeinen $\partial p/\partial x$ noch von r sowohl als von x abhängig ist, sind daher die Schubspannungen nicht proportional mit r, d. h. sie verteilen sich nicht, wie beim zylindrischen Stabe, für den $\partial p/\partial x$ eine Konstante ist, nach einem Gradliniengesetze über den Querschnitt, sondern nach irgend einem noch unbekannten, verwickelteren Gesetze. Dagegen sind die in den Querschnitt einzutragenden Spannungslinien ebenso wie beim zylindrischen Stabe konzentrische Kreise und die Bedingung für den Umfang, daß dieser mit einer Spannungslinie zusammenfallen muß, ist ohne weiteres erfüllt.

Wir betrachten ferner die Spannungen, die in einem durch die Stabachse gelegten Meridianschnitte übertragen werden. Da der Formänderungs- und demnach auch der Spannungszustand rings um die Achse symmetrisch sind, werden in jedem Meridianschnitte dieselben Spannungen übertragen, wie in jedem anderen; es genügt daher, die Spannungen etwa für den in die XZ-Ebene fallenden Meridianschnitt anzugeben. Nun ist nach den Gleichungen (27), wenn man die hier zutreffenden Werte einsetzt,

$$\sigma_y = 2G\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{e}{m-2}\right) = 2G\frac{\partial p}{\partial r}\frac{yz}{r}$$

und da für die XZ-Ebene y zu Null wird, erhält man daraus

$$\sigma_y = 0$$

d. h. in einem Meridianschnitt wird an keiner Stelle eine Normalspannung übertragen. Für die Schubspannungen erhält man nach den Gl. (28)

$$\tau_{yx} = Gz\frac{\partial p}{\partial x}; \quad \tau_{yz} = G\frac{\partial p}{\partial r}\cdot\frac{z^2 - y^2}{r}$$

oder für die XZ-Ebene, in der $y = 0$ und $z = r$ zu setzen ist,

$$\tau_{yx} = Gr\frac{\partial p}{\partial x}; \quad \tau_{yz} = Gr\frac{\partial p}{\partial r}. \tag{211}$$

Auch in den Meridianschnitt lassen sich Spannungslinien eintragen, die überall in der Richtung der resultierenden Schubspannung fortschreiten. Die Differentialgleichung einer solchen Spannungslinie ergibt sich nach den Gl. (211) zu

$$\frac{dr}{dx} = \frac{\frac{\partial p}{\partial r}}{\frac{\partial p}{\partial x}}. \tag{212}$$

Auch im Längs- oder Meridianschnitt des Stabes muß die Umrißlinie oder Merdianlinie mit einer Spannungslinie zusammenfallen. Das folgt nämlich aus der Bedingung, daß der Mantel des Stabs frei von äußeren Kräften sein soll. Denn wenn eine Spannungslinie die Umrißlinie unter irgend einem Winkel schneiden sollte, so hätte die Schubspannung an dieser Stelle eine Komponente senkrecht zur Umrißlinie, und nach dem Satze von der Gleichheit der einander zugeordneten Schubspannungen müßte dann auch auf dem sich anschließenden Elemente der Mantelfläche eine Schubkraft von der gleichen Größe übertragen werden.

Vorgeschrieben ist aber die Grenzbedingung, daß der Mantel von äußeren Kräften frei sein soll und um dieser Bedingung zu genügen, müssen wir daher verlangen, daß die Funktion p von r und x überall längs der Meridianlinie der Gleichung (212) genügt. Dabei ist unter r in dem Differentialquotienten dr/dx die Ordinate der Meridianlinie zu verstehen. Wenn eine bestimmte Gestalt des Umdrehungskörpers vorausgesetzt wird, ist damit dr/dx als Funktion von x gegeben und es handelt sich dann darum, eine Lösung von Gl. (209) zu finden, die zugleich der Bedingung in Gl. (212) entspricht. Diese Aufgabe ist, abgesehen von unwesentlichen Konstanten, die dabei willkürlich bleiben, bestimmt; in der Regel wird sie sich aber nicht lösen lassen, wenigstens nicht mit Hülfe von

einfach gebauten Formeln. Man kann aber, ähnlich wie bei der Torsion des prismatischen Stabes, die Aufgabe auch umgekehrt behandeln, nämlich so, daß man zuerst irgend eine Lösung der Gleichung (209) annimmt und hierauf die Gestalt der Meridianlinie des Umdrehungskörpers nach Gl. (212) ermittelt, die der angenommenen Lösung entspricht. Die Integration, die hierzu nötig ist, läßt sich auf jeden Fall, wenn nicht streng, so doch näherungsweise und zwar so genau als es verlangt wird, durch eine mechanische Quadratur ausführen.

Ferner denken wir uns noch ein rechtwinkliges Volumenelement von den Kantenlängen dx, dy, dz abgegrenzt, so daß die Fläche $dy\,dz$ in der vorher betrachteten Querschnittsfläche und das Rechteck $dx\,dz$ in dem mit der XZ-Ebene zusammenfallenden Längsschnitt liegt. Die Spannungen auf diesen beiden Seitenflächen sind bereits festgestellt; es bleibt noch übrig, die Normalspannung σ_z auf der Fläche $dx\,dy$ zu ermitteln, da die Schubspannungen auf dieser Fläche, durch die auf den anderen Flächen schon mit bekannt sind. Für σ_z erhält man nach Gl. (28) und den vorher festgestellten Werten von ζ und e zunächst allgemein

$$\sigma_z = -2G\frac{\partial p}{\partial r}\frac{yz}{r}$$

und insbesondere für die von uns ins Auge gefaßte Stelle, bei der $y = 0$ zu setzen ist,

$$\sigma_z = 0.$$

Aus diesen Betrachtungen geht hervor, daß der Spannungszustand des ganzen Körpers schon vollständig bestimmt ist, sobald man die Spannungslinien im Längsschnitt und die Größe der resultierenden Schubspannung an jeder Stelle des Längsschnitts kennt. Denn auch die vorher betrachtete, im Querschnitt auftretende Schubspannung ist nach dem Satze von der Gleichheit der einander zugeordneten Schubspannungen durch die Schubspannungen im Längsschnitte schon mit bestimmt.

Man kann sich auch noch ein unendlich kleines rechtwinklig dreiseitiges Prisma herausgeschnitten denken, von dem

eine Basisfläche in den Längsschnitt des Stabes, also in die XZ-Ebene fällt, während von den drei Seitenflächen eine in der Querschnittsebene liegt, die zweite, zu der vorigen senkrecht stehende parallel zur XY-Ebene geht und die dritte durch das Element der Spannungslinie im Längsschnitt ebenfalls senkrecht zum Längsschnitt gezogen ist. Auf dieser letzten Seitenfläche werden dann, wie aus der Gleichgewichtsbetrachtung folgt, alle Spannungskomponenten zu Null. Hiernach werden auf jeder Umdrehungsfläche, deren Meridianlinie eine der Spannungslinien des Längsschnitts der Welle ist, überhaupt keine Spannungen zwischen dem nach innen und dem nach außen hin liegenden Teile der Welle übertragen. Jeder zwischen zwei solchen Spannungslinien liegende Teil der Welle überträgt unabhängig von den übrigen Teilen einen gewissen Teil des ganzen Torsionsmoments von einem Ende der Welle nach dem anderen hin.

Die Grenzbedingungen am Mantel des Stabes sind also durch unsere Lösung, falls eben die Bedingung (212) für die Umrißlinie erfüllt ist, so daß diese selbst mit einer Spannungslinie zusammen fallen kann, jedenfalls befriedigt. Was nun die Bedingungen an den Endquerschnitten des Stabes anbetrifft, so haben wir vorher schon gesehen, daß in allen Querschnitten und daher auch in den Endquerschnitten nur Schubspannungen auftreten, die überall tangential gerichtet sind. Über das Gesetz, nach dem diese Schubspannungen mit der Entfernung von der Mitte zunehmen, ist durch die Gleichungen (210) freilich ebenfalls schon in bestimmter Weise verfügt, da p bereits durch die anderweitigen Bedingungen festgelegt ist. Wir können also unsere Lösung nicht etwa dem Falle anpassen, daß die Verteilung der äußeren Kräfte, die die Verdrehung hervorrufen, über die Endquerschnitte in ganz beliebiger Weise vorgeschrieben ist. Unsere Lösung paßt vielmehr nur für den Fall, daß diese Verteilung von selbst mit der aus den Gleichungen (210) hervorgehenden übereinstimmt. Dann sind aber in der Tat alle Bedingungen erfüllt und damit ist bewiesen, daß der Formänderungs- und Spannungszustand, wie

wir ihn vorher angaben, unter diesen Umständen auch wirklich eintreten muß.

Im übrigen verhält es sich in dieser Hinsicht mit der Torsion der Umdrehungskörper genau so wie mit der Torsion der prismatischen Stäbe. Auch bei diesen ist die Lösung genau richtig nur unter der Voraussetzung, daß das verdrehende Kräftepaar an den Stabenden so angebracht wird, wie sich dies aus der Lösung selbst ergibt. Wie schon im dritten Bande näher besprochen war, macht sich aber der Einfluß der besonderen Art, wie sich das Kräftepaar an den Stabenden aus Einzelkräften zusammensetzt, nur in der Nähe der Stabenden selbst bemerkbar und in größeren Entfernungen von diesen Enden ist es gleichgültig, wie das verdrehende Kräftepaar im einzelnen angebracht ist. Das gilt ebenso bei der Torsion der Umdrehungskörper; wir können daher die hier besprochene Lösung ohne Rücksicht auf die besonderen Verhältnisse an den Stabenden in größeren Entfernungen von diesen stets als zutreffend ansehen.

Damit ist endgültig unsere Aufgabe auf die Integration der Gleichung (209) unter Berücksichtigung der Grenzbedingung in Gl. (212) für den Umfang zurückgeführt.

§ 32. Der kegelförmige Stab.

Zur Erläuterung der vorhergehenden Betrachtungen sei hier als einfachstes Anwendungsbeispiel die Torsion eines Stabes besprochen, der die Gestalt eines abgestumpften Kreiskegels hat. Hierzu setze man

$$p = \frac{C}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{213}$$

womit in der Tat, wie man durch Bildung der Differentialquotienten leicht findet, die Differentialgleichung (209) befriedigt ist. Jede Funktion von r und p, von der dies zutrifft, gibt die Lösung des Torsionsproblems für einen Stab von einer bestimmten Gestalt an, die aus Gl. (212) hervorgeht. Setzt man p aus Gl. (213) in Gl. (212) ein, so geht sie über in

$$\frac{dr}{dx} = \frac{r}{x}$$

aus der durch Integration

$$r = Kx$$

gefunden wird, wenn K die Integrationskonstante bedeutet. Die Umrißlinie des Meridianschnitts ist daher eine Gerade und auch alle Spannungslinien dieses Schnitts sind gerade Linien, die durch den Koordinatenursprung gehen. Die in Gl. (213) gegebene Lösung bezieht sich daher in der Tat auf den kegelförmigen Stab, der etwa von einer Abszisse a bis zu einer Abszisse b reichen kann. Die Schubspannung in irgend einem Querschnitt ist im Abstande r von der Achse nach Gl. (210)

$$\tau = GC \frac{3rx}{(x^2 + r^2)^{\frac{5}{2}}}. \qquad (214)$$

Die Konstante C ist dem verdrehenden Momente proportional und in der früher schon oft besprochenen Weise durch eine Momentengleichung zu ermitteln. Auch die Kurve, in die ein vor der Formänderung gezogener Radius durch die Verdrehung übergeht, folgt sofort aus Gl. (213), indem sich jeder auf diesem Halbmesser gelegene Punkt um den Betrag pr senkrecht zum Halbmesser verschiebt. Bezeichnet man die Verschiebung pr mit v, so ist daher

$$v = \frac{Cr}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

die Gleichung der Kurve.

§ 33. Die Eigenschaften des Spannungsfeldes im Längsschnitte.

In Abb. 22 ist ein Längsschnitt des Umdrehungskörpers gezeichnet, von dem dabei angenommen ist, daß er etwa aus zwei zylindrischen Teilen A und B von verschiedenem Durchmesser bestehe, die durch eine Übergangsstelle mit einer Auskehlung zusammenhängen. In den Schnitt ist eine Anzahl von Spannungslinien eingetragen, von jenem Verlaufe, wie er in diesem Falle ungefähr zu erwarten ist. Die Pfeile der

Schubspannungen und daher auch der Spannungslinien sind zu beiden Seiten der Stabachse entgegengesetzt gerichtet; im übrigen ist aber die Stabachse zugleich eine Symmetrieachse des Spannungsfeldes, so daß man sich nur um den Verlauf im oberen Teile des Längsschnitts zu kümmern braucht.

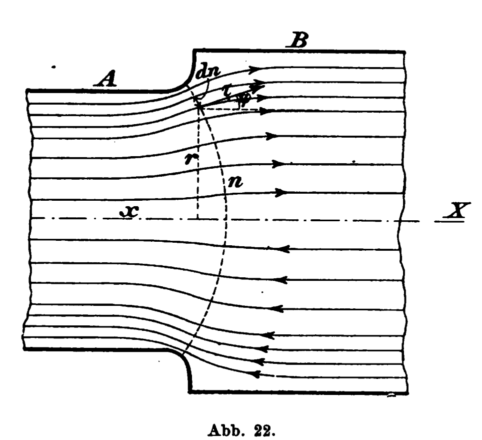


Abb. 22.

Bezeichnet man jetzt der Kürze halber die Schubspannungskomponenten parallel zur Achse und senkrecht dazu mit τ_x und τ_r, so hat man zunächst nach den Gleichungen (211)

$$\tau_x = Gr\frac{\partial p}{\partial x}; \quad \tau_r = Gr\frac{\partial p}{\partial r}. \tag{215}$$

Außerdem soll noch mit τ die resultierende Schubspannung im Punkte x, r und mit φ der Neigungswinkel bezeichnet werden, den sie mit der X-Achse bildet; dann hat man also

$$\tau_x = \tau\cos\varphi; \quad \tau_r = \tau\sin\varphi; \quad \tau^2 = \tau_x{}^2 + \tau_r{}^2. \tag{216}$$

Ferner lautet die Differentialgleichung einer Spannungslinie, wenn man unter x und r deren Koordinaten versteht, wie schon in Gl. (212) ausgesprochen war,

$$\frac{dr}{\partial x} = \frac{\tau_r}{\tau_x} = \frac{\partial p}{\partial r} : \frac{\partial p}{\partial x}. \tag{217}$$

Wir wollen uns jetzt eine Linie n gezogen denken, die überall rechtwinklig zu den Spannungslinien verläuft. Berechnet man, um wie viel sich p ändert, wenn man um ein Differential dn auf der Linie n von einer Spannungslinie nach außen hin zur nächsten fortschreitet, so erhält man

$$dp = -\frac{\partial p}{\partial x}dn\sin\varphi + \frac{\partial p}{\partial r}dn\cos\varphi$$

und daher mit Rücksicht auf die Gleichungen (216)

$$\frac{dp}{dn} = -\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\tau_r}{\tau} + \frac{\partial p}{\partial r}\frac{\tau_x}{\tau}$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (215)

$$\frac{dp}{dn} = 0. \tag{218}$$

Alle Punkte, die auf einer orthogonalen Trajektorie n der Spannungslinien liegen, drehen sich daher bei der Formänderung um denselben Winkel p; diese Linien können daher auch als Linien gleichen Verdrehungswinkels bezeichnet werden.

Die Spannungslinien können ferner als die Stromlinien einer ebenen Flüssigkeitsbewegung angesehen werden. Freilich darf man, um zu einer solchen hydrodynamischen Abbildung des Spannungsfeldes zu gelangen, die Geschwindigkeit der Strömung nicht einfach proportional zur Schubspannung τ setzen, weil sonst die Kontinuitätsbedingung für die Strömung einer unzusammendrückbaren Flüssigkeit nicht erfüllt wäre. Um dieser Bedingung zu genügen, setze man vielmehr, wenn unter u die Geschwindigkeit der Strömung und unter u_x und u_r ihre Komponenten verstanden werden,

$$u = \alpha r^2 \tau; \quad u_x = \alpha r^2 \tau_x; \quad u_r = \alpha r^2 \tau_r, \tag{219}$$

wobei α eine Konstante bedeutet, durch die der Maßstab ausgedrückt wird, nach dem die Geschwindigkeit u auszumessen ist, um daraus die Schubspannung τ abzuleiten. Nach den Gleichungen (215) wird dann

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{u_x}{\alpha G r^3}; \qquad \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{u_r}{\alpha G r^3}. \tag{220}$$

Wenn man diese Werte in die Differentialgleichung (209), der p zu genügen hat, nämlich

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{3}{r}\frac{\partial p}{\partial r} = 0$$

einsetzt, geht sie über in

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_r}{\partial r} = 0 \tag{221}$$

und hiermit ist bewiesen, daß die Kontinuitätsbedingung durch die Flüssigkeitsströmung u erfüllt wird. Differentiiert man ferner die erste der Gl. (220) nach r und die zweite nach x, so erhält man durch Vergleich beider Ergebnisse

$$\frac{\partial u_x}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial x} = 3\frac{u_x}{r}. \tag{222}$$

Im Zusammenhange mit der Grenzbedingung, daß die äußerste Stromlinie mit der Umrißlinie des Längsschnitts zusammenfallen muß, wird hierdurch die Flüssigkeitsströmung völlig bestimmt und unsere Aufgabe ist damit auf eine hydrodynamische zurückgeführt. Eine strenge Lösung bei beliebig gegebener Umrißlinie, z. B. bei der in Abb. 22 angenommenen, wird dadurch freilich nicht erleichtert; dagegen ist die hydrodynamische Aufgabe, wegen ihrer unmittelbaren Anschaulichkeit einer Abschätzung viel zugänglicher, als die ursprünglich gegebene.

Hierzu ist es jedoch von Vorteil, Gl. (222), die sich auf die Wirbelstärke der Flüssigkeitsbewegung bezieht, durch eine andere, mit ihr gleichwertige zu ersetzen, die mit Hülfe eines von Stokes herrührenden allgemeinen Satzes leicht daraus abgeleitet werden kann. Ich kann diesen Satz hier freilich nicht als bekannt voraussetzen und muß deshalb, um ohne seine Hülfe zu dem angegebenen Ziele zu gelangen, eine etwas längere Rechnung durchführen.

Zunächst hat man für die Differentiation irgend einer Funktion von x und r, z. B. von u nach der Richtung von n

$$\frac{du}{dn} = -\frac{\partial u}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi,$$

wovon vorher schon bei der Ableitung von Gl. (218) Gebrauch gemacht war. Nun folgt aus der Gleichung

$$u^2 = u_x^2 + u_r^2$$

durch Differentiation nach x

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{u}\left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial x}\right) = \frac{\partial u_x}{\partial x} \cos\varphi + \frac{\partial u_r}{\partial x} \sin\varphi$$

und entsprechend läßt sich auch der Differentialquotient $\frac{\partial u}{\partial r}$ bilden. Damit erhält man für $\frac{du}{dn}$

$$\frac{du}{dn} = -\frac{\partial u_x}{\partial x} \sin\varphi \cos\varphi - \frac{\partial u_r}{\partial x} \sin^2\varphi + \\ + \frac{\partial u_x}{\partial r} \cos^2\varphi + \frac{\partial u_r}{\partial r} \sin\varphi \cos\varphi \cdot$$

Dieser Ausdruck läßt sich noch weiter umformen; zunächst läßt er sich schreiben

$$\frac{du}{dn} = -\sin\varphi\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u_x}{\partial r}\sin\varphi\right) + \\ + \cos\varphi\left(\frac{\partial u_r}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u_r}{\partial r}\sin\varphi\right) + \frac{\partial u_x}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial x},$$

wofür auch, wenn man eine Differentiation in der Richtung der Stromlinien mit $\frac{d}{ds}$ bezeichnet, so daß also

$$\frac{d}{ds} = \frac{\partial}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial}{\partial r}\sin\varphi$$

ist, und unter Beachtung von Gl. (222)

$$\frac{du}{dn} = -\frac{du_x}{ds}\sin\varphi + \frac{du_r}{ds}\cos\varphi + 3\,\frac{u_x}{r}$$

gesetzt werden kann. Ferner hat man

$$\frac{du_x}{ds} = \frac{d}{ds}(u\cos\varphi) = \frac{du}{ds}\cos\varphi - u\sin\varphi\,\frac{d\varphi}{ds}$$

$$\frac{du_r}{ds} = \frac{d}{ds}(u\sin\varphi) = \frac{du}{ds}\sin\varphi + u\cos\varphi\,\frac{d\varphi}{ds},$$

womit die vorhergehende Gleichung übergeht in

$$\frac{du}{dn} = u\frac{d\varphi}{ds} + 3\frac{u_x}{r}.$$

Der Differentialquotient $\frac{d\varphi}{ds}$ hat aber eine einfache geometrische Bedeutung; bezeichnet man nämlich den Krümmungshalbmesser der Stromlinie an der Stelle x, r mit R, so ist

$$R\,d\varphi = ds \quad \text{oder} \quad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{R}$$

und hiermit erhält man endlich die gewünschte Gleichung

$$\frac{du}{dn} = \frac{u}{R} + 3\frac{u_x}{r}. \tag{223}$$

In der allgemeineren Form

$$\frac{du}{dn} = \frac{u}{R} + \frac{\partial u_x}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial x}$$

würde sie, wie auch nach dem Stokesschen Satze viel kürzer als hier geschehen nachgewiesen werden könnte, für jede ebene Flüssigkeitsströmung gelten. Benützen wir dagegen die speziellere Form (223), so ist damit schon der besonderen durch Gl. (222) ausgesprochenen Art der Flüssigkeitsbewegung Rechnung getragen, so daß in der Tat die anschaulichere Gleichung (223) einen vollständigen Ersatz für Gl. (222) bildet.

Durch diese Betrachtungen wird nun eine angenäherte Lösung der Aufgabe auf dem folgenden Wege ermöglicht. Man nehme zuerst versuchsweise irgend einen Stromlinienverlauf an, etwa den in Abb. 22 gezeichneten. Man weiß schon, daß im zylindrischen Teile A der Welle und zwar in größerer Entfernung von der Übergangsstelle, wo also die Stromlinien geradlinig verlaufen, die Schubspannungen τ proportional mit r, die Stromgeschwindigkeiten u daher proportional mit r^3 sind. Zieht man nun irgend eine Trajektorie n an der Übergangsstelle, so folgt aus der Kontinuitätsbedingung für jede Stelle von n der zugehörige Wert von u, indem dieser Wert von u sich zu dem im zylindrischen Teile für dieselbe Stromlinie umgekehrt verhalten muß wie die Abstände benachbarter Stromlinien voneinander. Die Kontinuitätsbedingung allein genügt daher bei gegebenem Stromlinienverlaufe bereits, um für jede Trajektorie n die Verteilung von u mit genügender Genauigkeit zeichnerisch zu ermitteln. Wenn dann der angenommene Stromlinienverlauf richtig sein soll, so muß von selbst das für u gefundene Verteilungsgesetz die durch Gl. (223) festgestellte Bedingung befriedigen. Man

hat also damit ein Mittel, um die Richtigkeit des anfänglich angenommenen Stromlinienverlaufes zu prüfen. Zugleich erkennt man aus den Widersprüchen, die sich mit Gl. (223) ergeben, in welchem Sinne man die anfängliche Annahme abzuändern hat, um die Widersprüche zu vermindern und damit schließlich zu einer praktisch genügend genauen Lösung zu gelangen.

Das ist freilich ein sehr mühsames Verfahren, das die Benützung einer im großen Maßstabe angelegten und sehr sorgfältig durchgeführten Zeichnung verlangt, die wiederholt abgeändert werden muß, bis sie als befriedigend angesehen werden kann. Auch dann darf man keine große Genauigkeit von diesem Verfahren erwarten. Eine solche wird aber für die praktischen Anwendungen auch gar nicht verlangt, da hierfür schon eine ungefähre Schätzung als ausreichend anzusehen ist. Eine bessere Lösung wäre freilich sehr zu wünschen; so lange sie fehlt, kann man sich aber auch mit der hier besprochenen begnügen.

Hauptsächlich kommt es natürlich auf den Stromlinienverlauf in der Nähe des Umfanges bei der Übergangsstelle an, da hier die größten Spannungen auftreten. Und für die erste Wahl des Stromlinienverlaufes an dieser Stelle liefert Gl. (223) von vornherein einen Anhalt, da der Krümmungshalbmesser R des Umfanges gegeben ist. Anstatt mit den Geschwindigkeiten u zu rechnen, kann man übrigens mit Hülfe der Gleichungen (219) auch die Schubspannungen selbst in Gl. (223) einführen, womit sie übergeht in

$$\frac{d\tau}{dn} = \frac{\tau}{R} + \frac{\tau_x}{r}. \tag{224}$$

Der Differentialquotient auf der linken Seite kann als die Spannungssteigung oder sein negativer Wert (wenn nämlich dn nach innen hin angenommen wird) als das Spannungsgefäll bezeichnet werden. Im zylindrischen Teile der Welle, fern von der Übergangsstelle, ist $R = \infty$ und τ_x stimmt mit τ, zugleich auch dn mit dr überein; daher ist dort das Spannungs-

gefäll gleich $\frac{\tau}{r}$, wie schon aus der Theorie der Torsion der zylindrischen Welle bekannt ist. Gleich zu Beginn der Übergangsstelle kann τ_x immer noch als gleich mit τ angesehen werden und für den Umfang gilt dann, wenn man die Werte an dieser Stelle durch den Zeiger 0 hervorhebt,

$$\left(\frac{d\tau}{dn}\right)_0 = \tau_0 \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{r_0}\right).$$

Nun ist der Halbmesser r_0 in den gewöhnlich vorkommenden Fällen weit größer als der Krümmungshalbmesser R_0 der Abrundung. Die Formel lehrt daher, daß das Spannungsgefälle hier weit größer sein muß, als am Umfange des zylindrischen Teils. Die Stromlinien müssen sich daher in der Nähe der Abrundung stark zusammendrängen und die Spannung wird erheblich größer als am Umfange des zylindrischen Teils der Welle und zwar gilt dies umsomehr, je kleiner der Halbmesser R_0 der Abrundung im Vergleiche zum Wellenhalbmesser r_0 ist.

Auf diesen Umstand hat man früher bei der Berechnung solcher Wellen nicht geachtet und die Folge war, daß man häufig zu kleine Abrundungshalbmesser ausgeführt hat, die zu Wellenbrüchen an den Übergangsstellen führten.

Hierbei muß übrigens noch bemerkt werden, daß die Überanstrengung des Materials an der Übergangsstelle bei einer Welle, die immer nur in demselben Sinne von einem konstanten Momente verdreht wird, nicht allzuviel schadet, da nach einer Überschreitung der Elastizitätsgrenze innerhalb dieses eng abgegrenzten Bezirkes sofort eine andere und zwar für die Festigkeit der Welle günstigere Verteilung der Spannungen eintritt, als wir sie hier unter der Voraussetzung, daß die Elastizitätsgrenze nicht überschritten wird, gefunden haben. Etwas anderes ist es aber, wenn das verdrehende Moment stark wechselt und namentlich wenn es abwechselnd im entgegengesetzten Sinne dreht. So gering die erste Beschädigung durch das Überschreiten der Elastizitätsgrenze auch sein mag, so wird doch durch eine genügend häufige Wieder-

holung zuletzt der Bruch herbeigeführt. In der Tat sind auch die im Betriebe öfters vorgekommenen Wellenbrüche, von denen ich vorher sprach, in der Regel erst nach längerem Laufe der Maschine, oft erst nach Monaten oder selbst nach Jahren vorgekommen.

Für den praktischen Gebrauch läßt sich noch die folgende, bequem zu handhabende Rechenvorschrift empfehlen. Man vergleiche die größte an der Übergangsstelle auftretende Spannung mit der Spannung am Umfange eines Hohlzylinders von demselben äußeren Durchmesser wie der zylindrische Teil A der Welle und von einer Wandstärke, die als ein gewisses Vielfaches des Krümmungshalbmessers an der Übergangsstelle anzunehmen ist. Ein solcher Vergleich wird nämlich durch den Umstand nahe gelegt, daß an der Übergangsstelle die Übertragung des Torsionsmomentes vorwiegend in den äußeren Schichten erfolgt, also einigermaßen ähnlich wie bei einer hohlen Welle.

Die Wanddicke der hohlen Welle, die die gleiche Beanspruchung am Umfange erfährt, sei mit ηR_0 bezeichnet. Dann ist η ein Koeffizient, dessen genauere Bestimmung freilich nur auf Grund der vorher auseinandergesetzten Theorie möglich ist, den man aber vorläufig unter den gewöhnlich vorliegenden Verhältnissen etwa zu 1,5 einschätzen kann. Sobald η bekannt oder auf Grund dieser Schätzung angenommen ist, läßt sich die Spannung der hohlen Welle nach der gewöhnlichen elementaren Formel sofort berechnen, womit auch die ebenso hohe Beanspruchung der tatsächlich vorliegenden Welle an der Übergangsstelle bekannt wird.

Alle vorhergehenden Betrachtungen beziehen sich auch auf den Fall, daß eine Welle, wie aus dem Längsschnitt in Abb. 23 zu ersehen ist, eine ringsumlaufende Eindrehung erhalten hat. Die Beanspruchung wird hier, wie aus der Betrachtung des Stromlinienverlaufes sofort zu erkennen ist, am größten im Grunde der Eindrehung und sie ist etwa ebenso hoch einzuschätzen, wie bei der Übergangs-

stelle in Abb. 22, wenn der Krümmungshalbmesser der Abrundung in beiden Fällen gleich groß und der Durchmesser

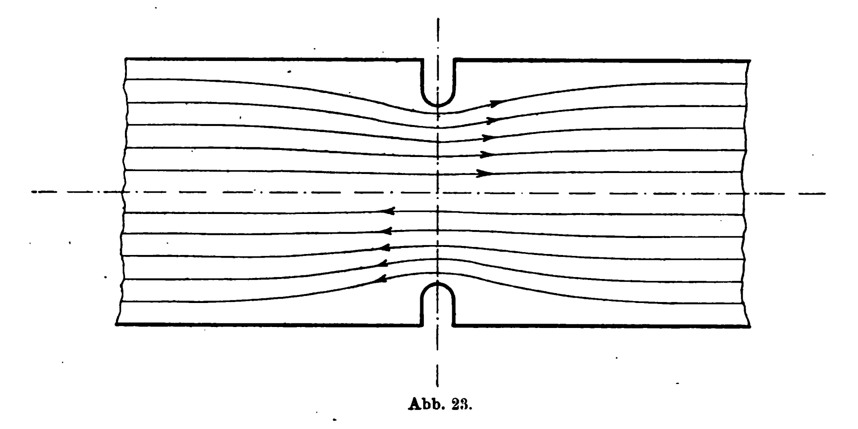


Abb. 23.

des durch die Eindrehung geschwächten Teiles in Abb. 23 ebensogroß ist wie der Durchmesser des zylindrischen Teiles in Abb. 22.

Verwandt mit den vorigen Fällen ist ferner noch die Beanspruchung einer Welle an der Befestigungsstelle eines Rades, vermittels dessen das verdrehende Moment auf

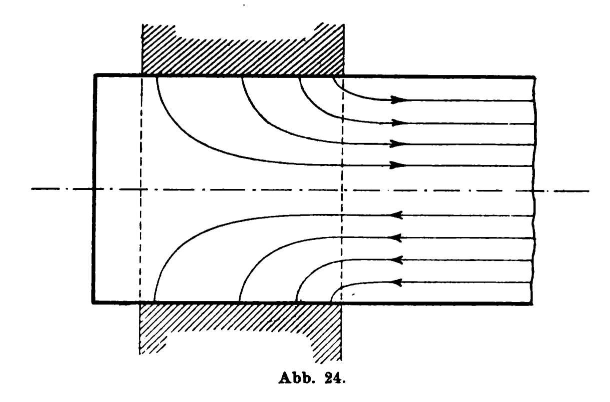


Abb. 24.

die Welle übergeleitet wird. In Abb. 24 ist angenommen, daß das Rad warm aufgezogen war und nur durch Reibung

auf der Welle festgehalten wird. Die Reibungskräfte zwischen der Innenfläche der Nabe und dem Wellenumfang treten dann an die Stelle von Schubspannungen und der Stromlinienverlauf läßt sich ganz im Rohen so etwa einschätzen wie er in Abb. 24 gezeichnet ist. Man wird dadurch sofort darauf aufmerksam, daß die größte Beanspruchung unmittelbar an der in Abb. 24 nach rechts hin gehenden Kante der Nabe zu erwarten ist. Mit Rücksicht darauf empfiehlt es sich, die Welle an der Aufsitzstelle des Rades nicht so wie in Abb. 24 gezeichnet ist, glatt durchgehen zu lassen, sondern sie etwas zu verstärken und den Übergang durch eine geeignete Abrundung mit hinlänglichem Krümmungshalbmesser zu bewirken. Wenigstens dann, wenn die Welle dazu bestimmt ist, häufig der Größe und dem Verdrehungssinne nach wechselnde Momente zu übertragen, wird man durch eine solche Anordnung ihre Widerstandsfähigkeit gegenüber der Anordnung in Abb. 24 bedeutend erhöhen.

§ 34. Ausknicken einer auf Verdrehen beanspruchten langen Welle.

Hier handelt es sich um einen Fall des labilen elastischen Gleichgewichts, der bei der Beanspruchung auf Torsion eintreten kann und zwar dann, wenn die Welle sehr lang im Verhältnis zu den Querschnittsabmessungen ist und über die ganze Länge hin keine Lager oder Führungen hat, die sie an einem seitlichen Ausweichen verhindern. Wenn die Welle lang genug ist, tritt unter diesen Umständen bei hinreichender Steigerung des verdrehenden Momentes eine seitliche Ausweichung, also eine Biegung ein, die schnell weiter anwächst und die Zerstörung der Welle durch die Biegungsbeanspruchung herbeiführt. Da die Vorbedingungen für diese Erscheinung nur selten gegeben sind, genügt es, wenn die Untersuchung hier nur unter der einfachsten Voraussetzung eines kreisförmigen Querschnitts durchgeführt wird. — In den ersten beiden Auflagen des dritten Bandes hatte ich diesen Gegen-

stand schon behandelt; in der dritten Auflage wurde er dagegen gestrichen und dafür an diese Stelle verwiesen.

Die Sache selbst kennt wohl jedermann aus der Erfahrung; zwar nicht aus der Erfahrung an eigentlichen Wellenleitungen, wohl aber mit einem dünnen Faden oder auch mit einem dünnen Drahte. Wenn ein Faden an beiden Enden festgehalten und dann verwunden wird, beginnt er, wenn die Verwindung hinreichend weit vorgeschritten ist, seitlich auszuweichen und sich spiralig aufzurollen. Man macht davon Gebrauch, wenn man den langen Faden zu einem doppelten von der halben Länge zusammenlegen will. Die beiden Teile, die man zusammenlegt, wickeln sich dann ohne weiteren Zwang in Schraubenlinien umeinander und bilden dadurch nachher ein gut zusammenhängendes Ganzes. Auch Metalldrähte, die man bei Festigkeitsprüfungen auf Verwinden beansprucht, brechen sehr häufig nicht einfach durch Versagen der Torsionsfestigkeit, sondern erst nach vorausgehendem Ausknicken, d. h. nach einer Formänderung, bei der die Mittellinie in eine langgestreckte Schraubenlinie übergeht.

Zur Untersuchung dieser Erscheinung kann man ähnlich verfahren, wie bei der gewöhnlichen Knickfestigkeit. Man sehe zu, wie groß das verwindende Moment M sein muß, um eine Ausbauchung, die als bereits vorhanden vorausgesetzt wird, gerade aufrecht zu erhalten. Bei einem kleineren Werte von M wird sich die Mittellinie der Welle von selbst wieder gerade strecken und bei jedem größeren Werte wird die Ausbauchung weiter fortschreiten. Das gefundene M stellt also die kritische Verdrehungsbelastung der Welle dar.

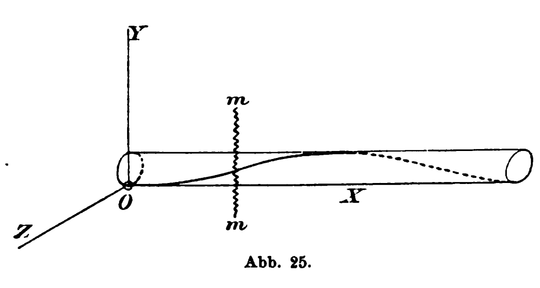


Abb. 25.

In Abb. 25 ist in axonometrischer Zeichnung die Schraubenlinie angegeben, in die die Mittellinie der Welle übergegangen sein mag. Zur

besseren Orientierung ist auch der Zylinder angedeutet, auf dem die Schraubenlinie liegt. Der Querschnitt der Welle ist dagegen weggelassen; mit dem gezeichneten Zylinder hat daher der Umriß der Welle selbst nichts gemein. Die anfängliche Lage der Wellenmittellinie im unverdrehten Zustande möge mit der Erzeugenden X des Zylinders zusammenfallen; daß sie überhaupt mit einer Zylindererzeugenden zusammenfallen muß, folgt daraus, daß die Enden der Wellenmittellinie gegen eine seitliche Ausweichung gestützt sind.

Man lege irgend einen Querschnitt mm durch die Welle und bringe daran das verdrehende Moment M an. Dieses Moment ist eine gerichtete Größe, die parallel zur X-Achse geht. Wir zerlegen es in zwei Komponenten, von denen die eine in die Richtung der Tangente an die Schraubenlinie fällt und die zweite senkrecht dazu steht. Die erste Komponente entspricht den Torsionsspannungen im Querschnitte der Welle und die zweite hält bei passender Größe die Biegung der Wellenmittellinie aufrecht.

Rechtwinklig zur X-Achse seien noch zwei Koordinatenachsen der y und z angenommen. Die Winkel, die die Tangente an die Schraubenlinie mit den Koordinatenrichtungen bildet, seien mit α, β, γ bezeichnet. Dann ist genau genug $\cos\alpha = 1$, dagegen

$$\cos\beta = \frac{dy}{ds}, \qquad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Hier sind unter y, z Koordinaten eines Punktes der Wellenmittellinie und unter ds ein Längenelement dieser Linie zu verstehen. Zerlegt man jetzt das ganze, in der Richtung der X-Achse gehende Verdrehungsmoment M in drei Komponenten, von denen eine in die Richtung von ds und die anderen in die Richtungen der Y- und Z-Achse fallen, so hat man für letztere

$$M_y = M\cos\beta = M\frac{dy}{ds}; \quad M_z = M\frac{dz}{ds}.$$

Das Moment M_y, dessen Richtung parallel zur Y-Achse geht, sucht eine Ausbiegung in der Richtung der Z-Achse hervorzubringen. In der Tat stehen ja bei einer gewöhnlichen

Biegung, bei der alle Kräfte in derselben Ebene liegen, die Momente, wenn man sie nicht nur der absoluten Größe nach betrachtet, sondern sie als gerichtete Größen auffaßt, alle senkrecht zur Belastungs- oder zur Biegungsebene. So ist es auch hier und die doppelte Krümmung der elastischen Linie wird durch das Zusammenwirken von M_y und M_z veranlaßt. Nach dem Superpositionsgesetze können wir die Wirkungen von M_y und M_z gesondert betrachten und beide nachträglich zusammensetzen. Für die Wirkung von M_y für sich gilt die Differentialgleichung der elastischen Linie in der Form

$$E\Theta\frac{d^2z}{dx^2} = -M_y = -M\frac{dy}{ds}$$

und dazu kommt noch für die andere Ausbiegungsrichtung die Gleichung

$$E\Theta\frac{d^2y}{dx^2} = -M\frac{dz}{ds}.$$

Die Vorzeichen in diesen beiden Gleichungen sind indessen noch zweifelhaft und bedürfen einer besonderen Untersuchung. Angenommen, y, z, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ seien an der betrachteten Stelle alle positiv und ebenso M_y, M_z. Wenn dann M_y einer Drehung im Sinne des Uhrzeigers, also in der Richtung von der X- zur Z-Achse entspricht (vgl. Abb. 26), trifft dies auch für M_z zu, die Drehung geht also hier von der Y- zur X-Achse. Auf die X-Achse bezogen, gehen daher beide Drehungen in verschiedener Richtung. Daraus folgt, daß bei gleichen Vorzeichen von M_y und M_z beide in die Differentialgleichung der elastischen Linie mit verschiedenen Vorzeichen einzuführen

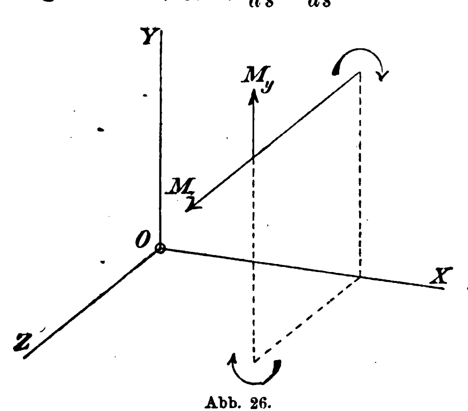


Abb. 26.

sind. Welches man positiv und welches man negativ einzusetzen hat, hängt von Vorzeichenfestsetzungen ab, auf die hier nicht weiter eingegangen zu werden braucht, da sie für das Resultat, das ich hier ableiten will, gleichgültig sind.

Schreibt man noch dx an Stelle von ds, so gehen jetzt die vorigen Gleichungen in die genauere Form

$$\left.\begin{aligned} E\Theta \frac{d^2 z}{dx^2} &= \pm M \frac{dy}{dx} \\ E\Theta \frac{d^2 y}{dx^2} &= \mp M \frac{dz}{dx} \end{aligned}\right\} \tag{225}$$

über. Die erste liefert nach Integration

$$\frac{dz}{dx} = \pm \frac{M}{E\Theta} y \pm C$$

und dies setze ich in die zweite Gleichung ein. Diese geht dadurch über in

$$E\Theta \frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M^2}{E\Theta} y - CM. \tag{226}$$

Die Lösung dieser Gleichung, die ganz der Eulerschen Gleichung für den Fall der gewöhnlichen Knickfestigkeit entspricht, lautet

$$y = A \sin \beta x + B \cos \beta x - C \frac{E\Theta}{M}, \tag{227}$$

wenn man mit β zur Abkürzung den Wert

$$\beta = \pm \frac{M}{E\Theta} \tag{228}$$

bezeichnet. Für z gilt natürlich eine Gleichung von derselben Form, wie man sofort einsieht, wenn man aus den Gleichungen (225) y anstatt z eliminiert.

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten A und B benutzen wir die Grenzbedingungen, daß $y = 0$ sein muß für $x = 0$ und für $x = l$. Daraus folgt

$$B = C \frac{E\Theta}{M} = \frac{C}{\beta}; \quad A = \frac{C}{\beta} \cdot \frac{1 - \cos \beta l}{\sin \beta l}$$

und daher schließlich

$$y = \frac{C}{\beta} \left\{ \frac{\sin \beta x}{\sin \beta l} (1 - \cos \beta l) + \cos \beta x - 1 \right\}. \tag{229}$$

Die Integrationskonstante C bleibt zunächst noch unbekannt. Wir differentiieren jetzt y zweimal und setzen den zweiten Differentialquotienten in die zweite der Gleichungen (225) ein, um z zu erhalten. Wir finden

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -C\beta\left\{\frac{\sin\beta x}{\sin\beta l}(1-\cos\beta l)+\cos\beta x\right\} = -\beta\frac{dz}{dx}$$

und daher nach einmaliger Integration

$$z = \frac{C}{\beta}\left\{\frac{\cos\beta x}{\sin\beta l}(\cos\beta l - 1)+\sin\beta x\right\}+K. \tag{230}$$

Auch z muß für $x = 0$ und für $x = l$ verschwinden. Die erste Bedingung liefert die neue Integrationskonstante K

$$K = \frac{C}{\beta}\,\frac{1-\cos\beta l}{\sin\beta l},$$

so daß z übergeht in

$$z = \frac{C}{\beta}\left\{\frac{(1-\cos\beta x)(1-\cos\beta l)}{\sin\beta l}+\sin\beta x\right\}. \tag{231}$$

Die andere Grenzbedingung dagegen lehrt, daß zur Aufrechterhaltung des angenommenen Gleichgewichtszustandes ohne Rücksicht auf die Größe von C, d. h. auf die Größe der Ausbiegung

$$(1-\cos\beta l)^2+\sin^2\beta l = 0$$

sein muß. Damit eine Summe von zwei Quadraten verschwinde, muß jedes Quadrat für sich verschwinden, also muß $\sin\beta l = 0$ und $\cos\beta l = +1$ sein. Dazu muß β so weit angewachsen sein, daß der Winkel $\beta l = 2\pi$ wird. Mit Rücksicht auf die Bedeutung von β hat man daher die Bedingungsgleichung

$$\frac{Ml}{E\Theta} = 2\pi \quad \text{oder} \quad M = 2\pi\frac{E\Theta}{l}. \tag{232}$$

Das ist die kritische Verdrehungsbelastung, die nicht erreicht werden darf, wenn man ein Ausknicken der Welle vermeiden will.

Man kann dieser Gleichung auch noch einen anderen Ausdruck geben. Nach Gl. (225) des dritten Bandes ist nämlich

der Verdrehungswinkel $\Delta\varphi$, der durch das Moment M veranlaßt wird,

$$\Delta\varphi = \frac{2Ml}{\pi a^4 G} = \frac{Ml}{2\Theta G}.$$

Setzt man in diese Gleichung den kritischen Wert von M aus Gl. (232) ein, so erhält man

$$\Delta\varphi = \pi\frac{E}{G}. \tag{233}$$

Also erst dann, wenn der Verdrehungswinkel etwas mehr als eine Umdrehung beträgt, kann nach dieser Formel ein Ausknicken eintreten. Bei Stahlwellen müßte daher die Länge etwa das 3000fache des Durchmessers betragen, wenn das Ausknicken früher als die Überwindung der gewöhnlichen Torsionsfestigkeit eintreten sollte. Indessen ist zu beachten, daß hierbei noch keine Rücksicht auf die schon vorher vorhandenen zufälligen Abweichungen der Wellenmittellinie von einer Geraden usw. genommen ist. Durch solche zufällige Umstände und ferner durch die Überschreitung der Elastizitätsgrenze kann die kritische Länge, von der ab das Ausknicken beginnt, ganz bedeutend herabgesetzt werden. Auch in dieser Hinsicht gleicht der Fall vollständig dem der gewöhnlichen Knickfestigkeit.

Vierter Abschnitt.

Umdrehungskörper mit achsialer symmetrischer Belastung. Wärmespannungen.

§ 35. Die elastischen Grundgleichungen in Zylinderkoordinaten.

Die erste Aufgabe, mit der wir uns in diesem Abschnitt beschäftigen wollen, läßt sich mit Hülfe von Abb. 27 in folgender Weise aussprechen. Die Abbildung stellt den Merdianschnitt durch einen Umdrehungskörper dar; die X-Achse ist die Symmetrie-Achse. Die Meridianlinie, also die äußere Umrißlinie kann beliebig gegeben sein. Der Mantel ist frei von äußeren Kräften; an den beiden senkrecht zur X-Achse stehenden Endquerschnitten greifen zunächst Lasten parallel zur Achse an, die nicht gleichförmig verteilt zu sein brauchen, sondern nach irgend einem Gesetze von dem Abstande r von der Achse abhängig sein können. Außerdem lassen wir

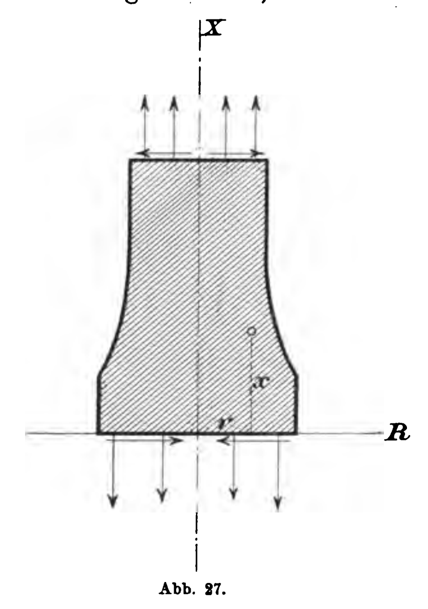


Abb. 27.

noch Schubspannungen τ in den Endquerschnitten als äußere Kräfte zu, die ebenfalls von r irgendwie abhängig sein sollen, aber überall radial gerichtet und ebenso wie die Normalspannungen rings um die X-Achse symmetrisch verteilt sind. Man soll den Formänderungs- und den Spannungszustand angeben, die durch diese Belastung in dem Körper hervorgerufen werden.

Die hiermit gestellte Aufgabe ist praktisch von großer Bedeutung, da sie bei vielen, anscheinend ganz einfachen Festigkeitsaufgaben, die man bei Bau- und Maschinenkonstruktionen zu lösen hat, zu Grunde liegt. Gewöhnlich behilft man sich in solchen Fällen mit den allereinfachsten Näherungsannahmen, die freilich oft sehr weit von der Wahrheit abweichen. Für den Fall z. B., daß an den Endquerschnitten keine Schubspannungen τ, sondern nur gleichmäßig über den Querschnitt verteilte Normalspannungen als Lasten auftreten, legt man der einfachen Festigkeitsberechnung die Annahme zu Grunde, daß auch in allen anderen Querschnitten des Umdrehungskörpers die Normalspannungen gleichmäßig verteilt seien. Das ist natürlich richtig für den Fall eines Zylinders; aber bei einer anderen Gestalt der Meridianlinie kann diese Annahme zu erheblichen Fehlern führen.

Auch wenn ein Zylinder zwischen zwei parallelen Druckplatten zusammengedrückt wird, wie bei einem gewöhnlichen Druckversuche, erfährt er keineswegs eine einfache Druckbeanspruchung mit gleichmäßig über die Querschnitte verteilten Druckspannungen, sondern er gerät in einen viel verwickelteren Spannungszustand, weil sich die Reibung an den Druckflächen einer Querdehnung des Probekörpers widersetzt, so daß an den Endquerschnitten außer den Normalspannungen, über deren Verteilung man zunächst gar nichts weiß, auch noch Reibungen, d. h. Schubspannungen τ in radialer Richtung auftreten. Die strenge Theorie des einfachen Druckversuchs mit zylindrischen Probekörpern gehört daher ebenfalls in den Kreis der hier zu behandelnden Aufgaben.

Endlich sei noch als hierher gehörig der durch den

Achsenschnitt in Abb. 28 angegebene Fall einer Kopfschraube angeführt. Die gewöhnliche Annahme, daß in dem Querschnitte, der den Übergang von dem Schafte in den Kopf der Schraube vermittelt, die Spannungen gleichmäßig über den Querschnitt verteilt seien, weicht hier sehr weit von der Wahrheit ab. Im Bewußtsein der Unsicherheit dieser Annahme sucht man sich freilich bei den praktischen Festigkeitsberechnungen dadurch zu helfen, daß man nur eine verhältnismäßig sehr niedrig bemessene zulässige Beanspruchung zu Grunde legt. Man rechnet dabei darauf, daß zwar die größte auftretende Spannung erheblich höher wird, als sie aus der Division der Zugbelastung durch die Querschnittsfläche gefunden wird, daß sie aber doch noch unter jenem Werte bleibt, der in Wirklichkeit zulässig ist, ohne daß die Gefahr einer Überschreitung der Elastizitätsgrenze eintritt. Das trifft ja auch, wie die Erfahrung lehrt, in der Tat gewöhnlich zu. Immerhin sind die Fälle von unerwarteten Brüchen solcher Schrauben in den Übergangsquerschnitten zu den Köpfen, die zu sehr verderblichen Folgen führten, nicht selten und es muß daher vor zu großem Vertrauen in die gewöhnliche einfache Festigkeitsberechnung entschieden gewarnt werden. Offenbar spielt auch hier der Krümmungsradius der Abrundung, durch die der Übergang aus dem Schafte in den Kopf vermittelt wird, eine ähnlich wichtige Rolle, wie bei der im vorigen Abschnitte behandelten Verdrehungsbeanspruchung eines Körpers von dieser Gestalt.

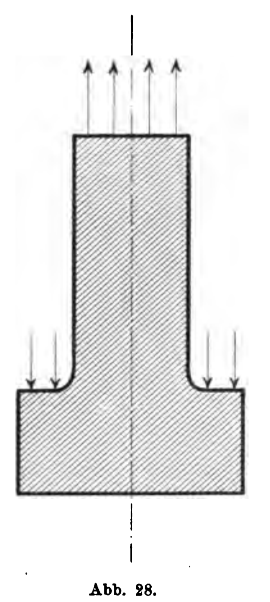


Abb. 28.

Die vorhergehenden Bemerkungen zeigen deutlich genug, von welcher praktischen Bedeutung ein Studium der gestellten Aufgabe, falls es zu gesicherten und verhältnismäßig leicht zu handhabenden Ergebnissen führt, zu werden vermag. Leider

liegen zu solchen brauchbaren Lösungen bisher nur geringe Anfänge vor. Das darf und soll uns aber von der Behandlung der Aufgabe nicht abschrecken; zunächst deshalb nicht, weil diese Anfänge doch immerhin schon einiges bieten, was sich verwerten läßt und dann weil man zuversichtlich erwarten darf, daß eine scharf ausgesprochene Stellung der Aufgabe unter Hervorhebung ihrer praktischen Wichtigkeit zu weiteren Bemühungen und hiermit auch zu weiteren nutzbaren Ergebnissen führen wird.

Zunächst haben wir die Aufgabe mathematisch zu formulieren. Sie ist natürlich in der allgemeinen Aufgabe der Elastizitätstheorie mit enthalten und deren Formeln lassen sich daher ohne weiteres übernehmen. Die Vereinfachungen, die durch die Symmetrie der Form und der Belastung herbeigeführt werden, sind indessen so erheblich, daß es sich verlohnt, an Stelle des allgemeinen sofort einen vereinfachten Formelsatz aufzustellen, der sich auf die vorliegende Aufgabe allein bezieht.

Wir betrachten den Spannungszustand in einem Punkte mit den Koordinaten xr im Meridianschnitte der Abb. 27. In allen anderen Meridianschnitten herrscht natürlich in den gleich gelegenen Punkten derselbe Spannungszustand. Wir denken uns durch den Punkt xr drei zueinander senkrechte Flächenelemente gelegt, von denen eines in die XR-Ebene fällt, das zweite senkrecht zur X-Achse und das dritte senkrecht zur R-Achse steht. In diesen Flächenelementen werden zunächst Normalspannungen übertragen, die wir der Reihe nach mit σ_t, σ_x und σ_r bezeichnen wollen. Der Zeiger t bei σ_t soll, wie in früheren ähnlichen Fällen darauf hinweisen, daß σ_t in tangentialer Richtung, d. h. also senkrecht zum Meridianschnitte geht. Von den Schubspannungen in den drei Schnittrichtungen läßt sich wegen der Symmetrie des Spannungszustandes um die X-Achse aussagen, daß in der XR-Ebene als Symmetrieebene keine Schubspannungen übertragen werden können. Es bleibt daher von den Schubspannungskomponenten nur $\tau_{xr} = \tau_{rx}$

von Null verschieden, wofür der Kürze halber in der Folge einfach τ geschrieben werden kann. Die Spannungskomponenten σ_t, σ_x, σ_r und τ reichen daher aus, um den Spannungszustand an jeder Stelle zu beschreiben und unsere Aufgabe läßt sich dahin aussprechen, sie als Funktionen von x und r darzustellen.

Wir betrachten ferner die elastische Formänderung, die der Körper unter dem Einflusse der Belastung erfährt. Sie wird genügend gekennzeichnet durch die Angabe der Verschiebungen $\xi \varrho$ jedes Punktes xr im Sinne der X- und der R-Achse, denn eine Verschiebung in tangentialer Richtung, also senkrecht zur Meridianebene kann bei der symmetrischen Belastung offenbar nicht eintreten. Auch ξ und ϱ haben wir als Funktionen von x und r darzustellen und wenn dies gelungen ist, sind damit auch die σ_t, σ_x, σ_r und τ auf Grund des Elastizitätsgesetzes bekannt.

Für die bezogenen elastischen Dehnungen ε_t, ε_r und ε_x hat man

$$\varepsilon_t = \frac{\varrho}{r}; \quad \varepsilon_r = \frac{\partial \varrho}{\partial r}; \quad \varepsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

wie ja aus früheren Betrachtungen schon hinlänglich bekannt ist. Für die kubische Ausdehnung e erhält man daher

$$e = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \varrho}{\partial r} + \frac{\varrho}{r}.$$

Zur vereinfachten Schreibweise der später auftretenden Formeln, die sonst recht unübersichtlich ausfallen würden, wollen wir einen Operator D einführen, der durch

$$\mathbf{D} = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) \tag{234}$$

definiert ist. Hiermit können wir für e jetzt schon kürzer

$$e = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \mathbf{D}\varrho \tag{235}$$

schreiben. Man beachte, daß bei der Ausführung der Operation D die Variable x als eine Konstante zu behandeln ist.

Den Zusammenhang zwischen den Spannungen und den Formänderungen, der sich natürlich leicht auch wieder von neuem ableiten ließe, wollen wir unmittelbar aus den allgemeinen Formeln (27) und (28) S. 48 entnehmen. Man muß dabei nur beachten, daß die bezogene Dehnung $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ jetzt durch $\frac{\partial \varrho}{\partial r}$ und $\frac{\partial \zeta}{\partial z}$ durch $\frac{\varrho}{r}$ ausgedrückt wird. Dadurch findet man

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 2\,G\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{e}{m-2}\right) \\ \sigma_r &= 2\,G\left(\frac{\partial \varrho}{\partial r} + \frac{e}{m-2}\right) \\ \sigma_t &= 2\,G\left(\frac{\varrho}{r} + \frac{e}{m-2}\right) \\ \tau &= G\left(\frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial \varrho}{\partial x}\right) \end{aligned}\right\} . \qquad (236)$$

Auch die Gleichungen zwischen den Spannungskomponenten, die das Gleichgewicht eines Volumenelementes gegen Verschieben in den Richtungen der X- und der R-Achse ausdrücken, ließen sich aus den allgemeinen Formeln (24) entnehmen; wir wollen sie aber der Anschaulichkeit wegen lieber unmittelbar aus Abbildung 29 ableiten, in der ein Volumenelement in Aufriß und Grundriß dargestellt ist. Nach Wegheben der in allen Gliedern vorkommenden Faktoren $dx\ dr\ d\varphi$ lauten diese Gleichgewichtsbedingungen, wie man aus der Abbildung sofort entnimmt,

$$r\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial r \tau}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_r) + r\frac{\partial \tau}{\partial x} - \sigma_t = 0.$$

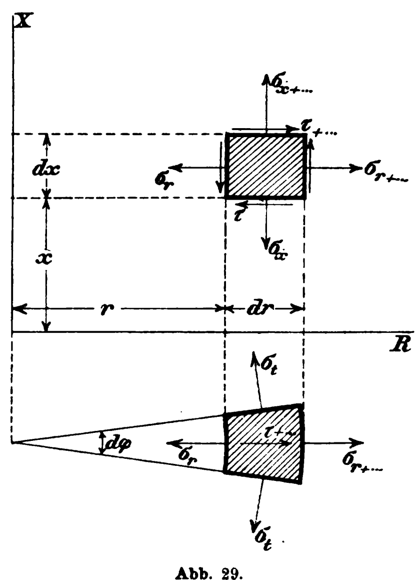


Abb. 29.

Führt man die Differentiationen nach r aus und

dividiert mit r, so lassen sich diese Gleichungen mit Benutzung des vorher eingeführten Operators $\mathbf{D}$ auch in der Form

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \mathbf{D}\tau = 0\\ \frac{\partial \tau}{\partial x} + \mathbf{D}\sigma_r - \frac{1}{r}\sigma_t = 0\end{aligned}\right\} \tag{237}$$

anschreiben, in der wir sie in der Folge benutzen wollen. Setzen wir die Spannungskomponenten aus den Gleichungen (236) in die vorstehenden Gleichungen ein, so erhalten wir die elastischen Grundgleichungen in Zylinderkoordinaten, nämlich die beiden partiellen Differentialgleichungen, denen die Verschiebungen $\xi \varrho$ genügen müssen. Die dazu erforderlichen Umrechnungen sollen für die erste Gleichung ausführlich wiedergegeben werden; bei der zweiten sind sie ganz ähnlich. Zunächst erhält man

$$2G\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{1}{m-2}\frac{\partial e}{\partial x}\right) + G\left(\mathbf{D}\frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{D}\varrho\right) = 0.$$

Nach Gl. (235) ist aber

$$\frac{\partial e}{\partial x} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{D}\varrho.$$

Durch Zusammenfassen zweier Glieder in der vorhergehenden Gleichung erhalten wir daher

$$\frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{2}{m-2}\frac{\partial e}{\partial x} + \mathbf{D}\frac{\partial \xi}{\partial r} = 0$$

oder endlich

$$\frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \mathbf{D}\frac{\partial \xi}{\partial r} = 0.$$

Durch Umformungen von ähnlicher Art wird die zweite Grundgleichung zu

$$\frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r}\mathbf{D}\varrho = 0$$

gefunden. Natürlich hätte man auch e mit Hülfe von Gleichung (235) ganz eliminieren können; in der angegebenen Form sind aber die Gleichungen übersichtlicher. Wir wollen sie

noch etwas anders anschreiben, indem wir außer $\mathbf{D}$ noch zwei neue Operatoren einführen, die mit $\mathbf{D}^2$ und $\mathbf{E}^2$ bezeichnet werden sollen, nämlich

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{D}^2 &= \frac{\partial}{\partial r}\,\mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\right) \\
\mathbf{E}^2 &= \mathbf{D}\frac{\partial}{\partial r} = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}
\end{aligned}\right\} \tag{238}$$

so daß also zwischen den Operatoren $\mathbf{D}^2$ und $\mathbf{E}^2$ der Unterschied besteht

$$\mathbf{D}^2 = \left(\mathbf{E}^2 - \frac{1}{r^2}\right).$$

Dann lauten die beiden Grundgleichungen

$$\left.\begin{aligned}
\frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \mathbf{E}^2\xi &= 0 \\
\frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2} + \mathbf{D}^2\varrho &= 0
\end{aligned}\right\}. \tag{239}$$

Der Operator $\mathbf{E}^2$ wurde übrigens schon im zweiten Abschnitt in Gl. (119) eingeführt und in § 11 wurde bereits gezeigt, daß die damit bezeichnete Operation für den Fall, daß rings um die X-Achse Symmetrie herrscht, mit der Operation $\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ zusammenfällt. Mit dem Laplaceschen Operator ∇^2 steht daher $\mathbf{E}^2$ in dem Zusammenhange, daß

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathbf{E}^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) \tag{240}$$

ist. In der Tat geht ja auch, wenn man dies beachtet, die erste der Grundgleichungen (239) unmittelbar aus der allgemeinen Form in den Gleichungen (32) hervor. Die beiden letzten der Gleichungen (32) ziehen sich in unserm Falle zu der letzten der Gleichungen (239) zusammen.

Mathematisch ausgedrückt besteht nunmehr unsere Aufgabe darin, Lösungen der Gleichungen (239) unter Beachtung der Gl. (235) für e zu finden, die allen Grenzbedingungen genügen.

Hierzu ist es wünschenswert, aus diesen Gleichungen noch andere abzuleiten, die dann freilich von der vierten Ordnung sind, in denen nur eine der unbekannten Funktionen e, ξ und

ϱ vorkommt. Am einfachsten gelingt dies für e, da ganz allgemein nach Gl. (32)

$$\nabla^2 e = 0$$

ist, wofür hier

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \mathsf{E}^2 e = 0 \quad \text{oder kürzer} \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathsf{E}^2\right) e = 0 \qquad (241)$$

geschrieben werden kann. Berücksichtigt man dies, so folgt durch Ausführung der Operation ∇^2 an der ersten der Gleichungen (239) in leicht verständlicher Schreibweise

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathsf{E}^2\right)^2 \xi = 0. \qquad (242)$$

Um e aus der zweiten der Gleichungen (239) zu eliminieren, führen wir daran die Operation $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathsf{D}^2\right)$ aus. Hierbei ist zu beachten, daß nach den Definitionsgleichungen für die Operatoren D^2 und E^2

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathsf{D}^2\right)\frac{\partial e}{\partial r} = \frac{\partial^3 e}{\partial x^2 \partial r} + \mathsf{D}^2 \frac{\partial e}{\partial r} = \frac{\partial^3 e}{\partial x^2 \partial r} + \frac{\partial}{\partial r}\mathsf{E}^2 e = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \mathsf{E}^2 e\right)$$

ist, was nach Gl. (241) gleich Null zu setzen ist. Die zweite Grundgleichung geht daher über in

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathsf{D}^2\right)^2 \varrho = 0. \qquad (243)$$

Sie unterscheidet sich von der für ξ gültigen Gleichung (242) nur dadurch, daß E^2 durch D^2 ersetzt ist.

§ 36. Lösungen für den Zylinder.

Von den Grundgleichungen (239) lassen sich leicht Lösungen in großer Zahl angeben. Die Schwierigkeit besteht nur darin, jene herauszufinden, die zugleich den Grenzbedingungen genügen. Als die wichtigste Grenzbedingung ist dabei jene für den Mantel des Umdrehungskörpers anzusehen, der frei von äußeren Kräften sein soll. Eine Lösung der Gleichungen, die dieser wichtigsten Bedingung genügt, ist stets zugleich auch eine Lösung der gestellten Aufgabe für einen bestimmten Belastungsfall, wenn auch vielleicht nicht gerade für

einen, der von besonderer Wichtigkeit ist. Immerhin ist aber jede solche Lösung als eine Bereicherung unserer Kenntnis zu betrachten.

Man kann dabei zwei Wege einschlagen. Entweder nimmt man irgend eine Lösung der Gl. (239) an und ermittelt dann die Gestalt der Meridiankurve des Umdrehungskörpers so, daß für sie die Grenzbedingung am Mantel bei der gewählten Lösung erfüllt ist. Oder man verlangt umgekehrt, daß die gesuchte Lösung für eine von vornherein gegebene Gestalt des Umdrehungskörpers zutreffe. Die letzte Aufgabe ist natürlich im allgemeinen schwieriger zu lösen, als die erste. In besonders einfachen Fällen, so namentlich für einen zylindrischen Körper kann man sie aber doch lösen, wie hier jetzt gezeigt werden soll.

Die einfachste Lösung für den Zylinder besteht natürlich darin, daß man

$$\xi = ax + b, \quad \varrho = cr, \quad e = a + 2c$$

setzt, worin a, b, c Konstanten sind, zwischen denen noch die Beziehung

$$c + \frac{a + 2c}{m - 2} = 0, \quad \text{d. h. } c = -\frac{a}{m}$$

besteht. Denn in diesem Falle werden σ_r, σ_t und τ überall zu Null und

$$\sigma_x = \frac{2G(m+1)}{m} a = Ea$$

d. h. die Lösung entspricht der einfachen Zug- oder Druckbeanspruchung des Zylinders mit gleichförmig verteilter Belastung.

Diese Lösung läßt sich jeder anderen überlagern. Man kann sich also z. B. den Formänderungs- und Spannungszustand eines Zylinders, der einem einfachen Druckversuche in einer Festigkeitsmaschine mit ungeschmierten Druckplatten unterworfen wird, aus zwei sich übereinander lagernden Teilen bestehend denken, von denen der eine der vorstehend beschriebene ist, während der andere die von diesem in Wirklichkeit be-

stehende Abweichung angibt. Wir brauchen uns dann weiterhin nur noch um den letzten Teil zu kümmern: er entspricht einem Belastungsfalle des Zylinders, bei dem die an jeder Druckfläche angreifenden äußeren Kräfte unter sich ein Gleichgewichtssystem bilden. Hieraus ist schon zu schließen, daß sich der Einfluß dieser Lasten hauptsächlich in der Nähe der Druckflächen geltend machen wird, während er in größerer Entfernung davon schnell abnimmt.

Für den Zylinder lauten die Grenzbedingungen am Mantel

$$\sigma_r = 0 \quad \text{und} \quad \tau = 0$$

für $r = r_1$, wenn man unter r_1 den Halbmesser des Zylinders versteht. Daraus ist zu schließen, daß sich die Funktionen σ_r und τ aus einer Summe von Gliedern von der Form

$$XR$$

zusammensetzen lassen müssen, wenn unter X eine Funktion von x allein und unter R eine Funktion von r allein verstanden wird, wobei R die Eigenschaft haben muß, daß es für $r = r_1$ zu Null wird. Hierdurch werden wir dazu geführt, einen Ansatz von derselben Form auch für ξ und ϱ zu versuchen. Setzen wir diesen in die Gl. (242) oder (243) für ξ oder ϱ ein, so gelangen wir in jedem Falle zu einer Gleichung von der Form

$$\frac{d^4 X}{dx^4} + A\frac{d^2 X}{dx^2} + BX = 0$$

wo nun A und B Funktionen von r allein sind, die wir, sofern es sich nur um die allgemeine Form der Funktion X handelt, als Konstanten ansehen können. Einer solchen Gleichung für X kann nun genügt werden durch Exponentialfunktionen oder Sinusfunktionen, also durch Ansätze wie $e^{\alpha x}$, $xe^{\alpha x}$, $\sin \alpha x$, $\cos \alpha x$, $x \sin \alpha x$ usf. und namentlich auch durch eine mit willkürlichen Koeffizienten behaftete Summe dieser einzeln möglichen Lösungen. In der Tat kann man auf diesem Wege zu einer Reihe verschiedener Lösungen unserer Aufgabe für den Zylinder gelangen.

Es würde zu weit führen, alle die verschiedenen möglichen Fälle jetzt im einzelnen zu behandeln. Ich beschränke mich auf den Ansatz $e^{-\alpha x}$ für X und zwar in der Erwägung, daß diese Funktion mit wachsendem x schnell abnimmt, was, wie wir sahen, aus der physikalischen Betrachtung für die Formänderungs- und Spannungsgrößen von vornherein zu erwarten ist. Ich setze also versuchsweise

$$\varrho = e^{-\alpha x} R. \tag{244}$$

Die Funktion ϱ muß dann jedenfalls der Gleichung (243) genügen, die hier wegen

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2} = \alpha^2 e^{-\alpha x} R$$

nach Wegheben des allen Gliedern gemeinsamen Faktors $e^{-\alpha x}$ übergeht in

$$(\alpha^2 + \mathbf{D}^2)^2 R = 0. \tag{245}$$

Das ist eine gewöhnliche Differentialgleichung vierter Ordnung für R, deren allgemeine Lösung sich aus vier mit willkürlichen Konstanten versehenen Einzellösungen zusammensetzen läßt, die sich zwar nicht in geschlossener Form, aber doch mit Hülfe von Reihenentwickelungen ohne weiteres darstellen lassen. Von den vier partikulären Integralen kommen übrigens für unsern Zweck, nämlich wenn es sich um einen Vollzylinder und nicht um einen Hohlzylinder handelt, nur zwei in Betracht, da die andern beiden für $r = 0$ zu unendlich großen Werten für ϱ oder für ξ führen würden, so daß sie für den Vollzylinder nicht brauchbar sind. Ich kann mich daher darauf beschränken, die beiden brauchbaren Lösungen abzuleiten.

Dazu suche ich zunächst die eine, für $r = 0$ verschwindende Lösung der Gleichung

$$(\alpha^2 + \mathbf{D}^2) R = 0 \tag{246}$$

auf, die natürlich zugleich eine Lösung der Gleichung (245) bildet. Ich schreibe sie in der Form einer Reihe

$$R = r + a_3 r^3 + a_5 r^5 + a_7 r^7 + \cdots$$

deren Koeffizienten a sich leicht bestimmen lassen. Zunächst nämlich ist

$$\mathbf{D}^2 r^n = \frac{d}{dr}\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right) r^n = (n^2 - 1) r^{n-2} \quad \text{und} \quad \mathbf{D}^2 r = 0$$

und wenn man dies in Gl. (246) einsetzt geht sie über in

$$\alpha^2 (r + a_3 r^3 + a_5 r^5 + \cdots) + 8 a_3 r + 24 a_5 r^3 + 48 a_7 r^5 + \cdots = 0$$

woraus die Koeffizienten folgen zu

$$a_3 = -\frac{\alpha^2}{8}; \quad a_5 = +\frac{\alpha^4}{8 \cdot 24}; \quad a_7 = -\frac{\alpha^6}{8 \cdot 24 \cdot 48}$$

usf. Wir wollen diese erste Lösung der Gleichung (245) mit F_1 bezeichnen. Dann haben wir

$$F_1 = r\left(1 - \frac{\alpha^2 r^2}{8} + \frac{\alpha^4 r^4}{8 \cdot 24} - \frac{\alpha^6 r^6}{8 \cdot 24 \cdot 48} + \cdots\right). \tag{247}$$

Wenn die Konstante α, die den reziproken Wert einer Länge bedeutet und über die wir noch ganz frei verfügen können, nicht so groß (die Länge also nicht so klein) wird, daß αr für $r = r_1$ eine Zahl darstellt, die erheblich größer als 1 ist, konvergiert die Reihe sehr rasch. Im andern Falle freilich wird die Berechnung des Funktionswertes sehr mühsam.

Die zweite brauchbare Lösung der Gl. (245) erhalten wir, indem wir

$$(\alpha^2 + \mathbf{D}^2) R = F_1$$

setzen. Auch diese Lösung, die wir mit F_2 bezeichnen wollen, erhalten wir auf demselben Wege wie die vorige, indem wir

$$F_2 = \frac{r^3}{8} + b_5 r^5 + b_7 r^7 + \cdots$$

setzen und die Koeffizienten durch Einsetzen des Ausdrucks in die Differentialgleichung bestimmen. Die Differentialgleichung geht damit über in

$$\alpha^2\left(\frac{r^3}{8} + b_5 r^5 + b_7 r^7 + \cdots\right) + (r + 24 b_5 r^3 + 48 b_7 r^5 + \cdots)$$
$$= r - \frac{\alpha^2 r^3}{8} + \frac{\alpha^4 r^5}{8 \cdot 24} - \cdots$$

woraus die Koeffizienten b folgen zu

$$b_5 = -\frac{2\alpha^2}{8 \cdot 24}; \quad b_7 = +\frac{3\alpha^4}{8 \cdot 24 \cdot 48}; \quad b_9 = -\frac{4\alpha^6}{8 \cdot 24 \cdot 48 \cdot 80}$$

usf., deren Bildungsgesetz leicht ersichtlich ist. Damit wird

$$F_2 = r^3\left(\frac{1}{8} - \frac{2\alpha^2 r^2}{8 \cdot 24} + \frac{3\alpha^4 r^4}{8 \cdot 24 \cdot 48} - \frac{4\alpha^6 r^6}{8 \cdot 24 \cdot 48 \cdot 80} + \cdots\right). \quad (248)$$

Bezeichnen wir jetzt mit C_1 und C_2 zwei willkürliche Integrationskonstanten, so nimmt ϱ nach Gl. (244) die mit der Differentialgleichung für ϱ verträgliche Form

$$\varrho = e^{-\alpha x}(C_1 F_1 + C_2 F_2) \quad (249)$$

an.

Diesen Wert von ϱ setzen wir nun in die zweite der Hauptgleichungen (239) ein, die für unsern Fall übergeht in

$$\frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial r} + (\alpha^2 + \mathbf{D}^2)\varrho = 0.$$

Dadurch erhalten wir unter Beachtung der Eigenschaften von F_1 und F_2

$$\frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial r} + e^{-\alpha x} C_2 F_1 = 0.$$

Durch Integration nach r erhalten wir daraus die kubische Ausdehnung e; daß der Buchstabe e hier in zwei verschiedenen Bedeutungen gebraucht wird, ließ sich nicht wohl vermeiden und nachdem besonders darauf aufmerksam gemacht ist, wird es auch nicht stören. Bilden wir also eine neue Funktion F_3

$$F_3 = \int F_1 dr = c + r^2\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha^2 r^2}{4 \cdot 8} + \frac{\alpha^4 r^4}{6 \cdot 8 \cdot 24} - \frac{\alpha^6 r^6}{8 \cdot 8 \cdot 24 \cdot 48} + \cdots\right) \quad (250)$$

so finden wir

$$\frac{m}{m-2} e = -C_2 e^{-\alpha x}\left\{c + r^2\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha^2 r^2}{4 \cdot 8} + \frac{\alpha^4 r^4}{6 \cdot 8 \cdot 24} - \cdots\right)\right\}. \quad (251)$$

Man hätte außer der Integrationskonstanten c noch sonst eine willkürliche Funktion von x beifügen dürfen, ich habe aber davon abgesehen, weil sich im weiteren Verlaufe der Rechnung doch herausgestellt haben würde, daß sie gleich Null zu setzen ist.

Diesen Wert von e hat man nun in die Gl. (235) für e einzusetzen, um daraus $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ zu ermitteln. Man findet

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{m-2}{m} C_2 e^{-\alpha x} F_3 - e^{-\alpha x}(C_1 \mathbf{D} F_1 + C_2 \mathbf{D} F_2)$$

und durch eine Integration nach x erhalten wir daraus jenen Ausdruck für ξ, der mit dem für ϱ gewählten verträglich ist. Die Ausführung der Integration liefert

$$\xi = \frac{m-2}{m} C_2 \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} F_3 + \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x}(C_1 \mathbf{D} F_1 + C_2 \mathbf{D} F_2). \qquad (252)$$

Von der Beifügung einer willkürlichen Funktion von r als Integrationskonstante soll aus demselben Grunde wie vorher abgesehen werden. Es zeigt sich nämlich, daß dieser Ausdruck bereits die erste der Hauptgleichungen (239) befriedigt. Um dies nachzuweisen, bilde ich nach der vorstehenden Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathbf{E}^2\right) \xi = \frac{m-2}{m} C_2 e^{-\alpha x}\left(\alpha F_3 + \frac{1}{\alpha} \mathbf{E}^2 F_3\right)$$
$$+ e^{-\alpha x} C_1 \left(\alpha \mathbf{D} F_1 + \frac{1}{\alpha} \mathbf{E}^2 \mathbf{D} F_1\right)$$
$$+ e^{-\alpha x} C_2 \left(\alpha \mathbf{D} F_2 + \frac{1}{\alpha} \mathbf{E}^2 \mathbf{D} F_2\right).$$

Da nun nach der Definition der Differentialoperatoren $\mathbf{D}^2$ und $\mathbf{E}^2$

$$\mathbf{E}^2 \cdot \mathbf{D} F_1 = \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}^2 F_1, \text{ also } \alpha \mathbf{D} F_1 + \frac{1}{\alpha} \mathbf{E}^2 \mathbf{D} F_1 = \frac{1}{\alpha} \mathbf{D}(\alpha^2 F_1 + \mathbf{D}^2 F_1)$$

ist, so geht zunächst die vorige Gleichung unter Beachtung der Eigenschaften von F_1 und F_2 über in

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathbf{E}^2\right) \xi = \frac{m-2}{m} C_2 e^{-\alpha x} \frac{1}{\alpha} (\alpha^2 F_3 + \mathbf{E}^2 F_3) + e^{-\alpha x} C_2 \frac{1}{\alpha} \mathbf{D} F_1$$

Ferner ist aber nach Gleichung (250)

$$\frac{d}{dr}(\alpha^2 F_3 + \mathbf{E}^2 F_3) = \alpha^2 \frac{dF_3}{dr} + \mathbf{D}^2 \frac{dF_3}{dr} = (\alpha^2 + \mathbf{D}^2) F_1 = 0$$

und daher

$$\alpha^2 F_3 + \mathbf{E}^2 F_3 = \text{konst.}$$

Was für einen Wert diese Konstante erhält, erkennen wir leicht, indem wir an F_3 in Gl. (250) die Operation $(\alpha^2 + \mathbf{E}^2)$ ausführen, wobei wir uns auf die ersten beiden Glieder beschränken können und hierauf $r = 0$ setzen. Dadurch findet man

$$(\alpha^2 + \mathbf{E}^2) F_3 = \alpha^2 c + 2.$$

Im ganzen wird hiermit

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathbf{E}^2\right)\xi = \frac{m-2}{m} C_2 e^{-\alpha x}\left(\alpha c + \frac{2}{\alpha}\right) + e^{-\alpha x} C_2 \frac{1}{\alpha} \mathbf{D} F_1.$$

Außerdem erhalten wir aus Gl. (251)

$$\frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial x} = C_2 \alpha e^{-\alpha x} F_3$$

und wenn wir diese Werte in die erste Grundgleichung einsetzen, erhalten wir

$$\frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathbf{E}^2\right)\xi = \frac{m-2}{m} C_2 e^{-\alpha x}\left(\alpha c + \frac{2}{\alpha}\right)$$

$$+ e^{-\alpha x} C_2 \frac{1}{\alpha}(\mathbf{D} F_1 + \alpha^2 F_3) = 0.$$

Daß diese Gleichung bei einer passenden Wahl der Konstanten c in der Tat identisch erfüllt ist, erkennt man leicht, indem man beachtet, daß

$$\frac{d}{dr}(\mathbf{D} F_1 + \alpha^2 F_3) = \mathbf{D}^2 F_1 + \alpha^2 F_1 = 0$$

und daher

$$\mathbf{D} F_1 + \alpha^2 F_3 = \text{konst.}$$

ist, sowie daß aus (247) und (250)

$$\mathbf{D} F_1 + \alpha^2 F_3 = 2 + \alpha^2 c$$

folgt. Die erste Hauptgleichung wird demnach durch die aufgestellten Werte von e und ξ erfüllt, wenn man

$$2 + \alpha^2 c = 0 \quad \text{oder} \quad c = -\frac{2}{\alpha^2} \tag{253}$$

setzt. Wir stellen hiernach die nunmehr gefundene fertige Lösung der Grundgleichungen wie folgt zusammen.

$$\left.\begin{aligned} e &= -\frac{m-2}{m} C_2 e^{-\alpha x} F_3 \\ \varrho &= e^{-\alpha x}(C_1 F_1 + C_2 F_2) \\ \xi &= e^{-\alpha x}\frac{1}{\alpha}\left(C_1 \mathbf{D} F_1 + C_2 \mathbf{D} F_2 + \frac{m-2}{m} C_2 F_3\right) \\ F_3 &= \frac{1}{\alpha^2}\left(-2 + \frac{\alpha^2 r^2}{2} - \frac{\alpha^4 r^4}{4\cdot 8} + \frac{\alpha^6 r^6}{6\cdot 8\cdot 24} - \frac{\alpha^8 r^8}{8\cdot 8\cdot 24\cdot 48} + \cdots\right) \end{aligned}\right\} \tag{254}$$

Daraus berechnen wir die Spannungskomponenten σ_r und τ nach den Gl. (236) und erhalten, wenn wir bei τ von den Eigenschaften der Funktionen F zur Vereinfachung des Ausdruckes Gebrauch machen,

$$\sigma_r = 2\,G e^{-\alpha x}\left(C_1 \frac{dF_1}{dr} + C_2 \frac{dF_2}{dr} - \frac{1}{m} C_2 F_3\right)$$

$$\tau = 2\,G e^{-\alpha x}\left(\frac{m-1}{m} C_2 \frac{1}{\alpha} F_1 - \alpha C_1 F_1 - \alpha C_2 F_2\right).$$

Um die Grenzbedingungen am Zylindermantel zu erfüllen, müssen wir die bisher willkürlich gebliebene Konstante α und das Verhältnis der beiden Koeffizienten C_1 und C_2 so ermitteln, daß die in den beiden Klammern stehenden Werte für $r = r_1$ zu Null werden. Das geschieht durch Auflösen der Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \left(C_1 \frac{dF_1}{dr} + C_2 \frac{dF_2}{dr} - \frac{1}{m} C_2 F_3\right)_{r=r_1} &= 0 \\ \left(\frac{m-1}{m} C_2 F_1 - \alpha^2 C_1 F_1 - \alpha^2 C_2 F_2\right)_{r=r_1} &= 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (255)$$

Durch Elimination des Verhältnisses $\frac{C_1}{C_2}$ entsteht daraus eine Gleichung, in der αr_1 als Unbekannte auftritt. Diese Gleichung ist transzendent und hat daher unendlich viele Wurzeln. Freilich braucht von diesen Wurzeln keine reell zu sein. Hätte man eine reelle Wurzel gefunden, so wäre damit sofort die Aufgabe für einen bestimmten Belastungsfall, der sich aus den Formeln selbst ergibt, gelöst. Ich habe mich jedoch durch Zahlenrechnung überzeugt, daß zwischen $\alpha r_1 = 0$ und $\alpha r_1 = 4$ keine reelle Wurzel der Gleichung liegt und es scheint, daß, wenn eine reelle Wurzel überhaupt vorhanden ist, sie noch erheblich größer sein muß, als 4. Eine solche Lösung hätte aber keine große Bedeutung, da sie sich wegen des Faktors $e^{-\alpha x}$ auf einen Spannungs- und Formänderungszustand beziehen würde, der sich nur auf die allernächste Nachbarschaft der Grundfläche erstreckte.

Auch eine rein imaginäre Lösung der transzendenten Gleichung ist nicht möglich. Dagegen gibt es selbstverständlich komplexe Wurzeln in beliebiger Zahl, deren Berechnung freilich einen sehr großen Aufwand an Zahlenrechnung erfordert, da die Lösung nur auf dem Wege des Probierens möglich ist.

Am wichtigsten von den komplexen Wurzeln sind jene mit einem kleinen reellen Anteile. Die Arbeit ist zu umfangreich, als daß ich mich jetzt mit der zahlenmäßigen Ermittelung einer solchen, die übrigens gar keine besondere Genauigkeit erforderte, aufhalten möchte. Ich will annehmen, man hätte eine solche Wurzel

$$\alpha = p + iq$$

gefunden. Dann würde natürlich der Faktor $e^{-\alpha x}$ in den Gl. (254) übergehen in

$$e^{-px}(\cos qx - i \sin qx)$$

und ebenso wären die durch die Reihenentwickelungen dargestellten Funktionen F in ihre reellen und imaginären Bestandteile zu zerlegen. Dadurch zerfiele jede der in Gl. (254) vorkommenden Größen ebenfalls in zwei Bestandteile und man hätte dann zwei Lösungen der Aufgabe gefunden, eine, die durch die reellen und die andere, die durch die imaginären Anteile dargestellt wird.

Hiermit ist wenigstens der Weg gewiesen, auf dem man zu zahlenmäßig bestimmten Lösungen der Aufgabe gelangen kann. Hat man mehrere Lösungen gefunden, so lassen sich daraus durch Übereinanderlagerung allgemeinere ableiten, durch die man sich einem gewünschten Falle weiter annähern kann. Die vorhergehenden Ableitungen können daher auch als eine Vorarbeit zu dem Ziele betrachtet werden, eine befriedigende Theorie des gewöhnlichen Druckversuchs mit zylindrischen Probekörpern aufzustellen. Voraussichtlich wird es möglich sein, wenn auch nur unter Aufwendung bedeutender weiterer Rechenarbeiten, dieses Ziel auf dem angegebenen Wege zu erreichen.

Schließlich bemerke ich noch, daß die Spannungskomponente σ_x, die neben σ_r und τ von besonderer Wichtigkeit ist, sich im Anschlusse an die Lösung in den Gl. (254) in der Form

$$\sigma_x = -2Ge^{-\alpha x}\left(C_1 \mathbf{D} F_1 + C_2 \mathbf{D} F_2 + \frac{m-1}{m} C_2 F_3\right)$$

anschreiben läßt, wovon bei einem komplexen Werte von α wieder entweder der reelle oder der imaginäre Anteil, je nachdem man sich für diesen oder jenen entschieden hat, zu nehmen ist.

§ 37. Lösungen mit Hülfe der Potentialfunktionen.

Die elastischen Grundgleichungen sind eng verwandt mit der Laplaceschen Differentialgleichung, der das Potential eines Kraftfeldes genügt, das von Massen herrührt, die Anziehungen oder Abstoßungen umgekehrt proportional mit dem Quadrate der Entfernung ausüben und zwar an solchen Stellen des Kraftfeldes, die außerhalb der Massen selbst liegen. Daher kommt es, daß man in der Elastizitätstheorie öfters von den Sätzen der Potentialtheorie Gebrauch machen kann. Zunächst soll die Laplacesche Gleichung selbst abgeleitet werden.

Eine punktförmige Masse, die sich an einer Stelle mit den Koordinaten abc befindet, übt in einem Punkte mit den Koordinaten xyz eine anziehende oder abstoßende Kraft von der Größe $\frac{m}{R^2}$ aus, wenn mit R die Entfernung bezeichnet, also

$$R^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$$

gesetzt wird. Die Komponenten XYZ dieser Kraft in den Richtungen der Koordinatenachsen werden daraus durch Multiplikation mit den Kosinus der Neigungswinkel gefunden, also

$$X = \frac{m(x-a)}{R^3}; \qquad Y = \frac{m(y-b)}{R^3}; \qquad Z = \frac{m(z-c)}{R^3}.$$

Das sind aber die partiellen Differentialquotienten einer Funktion V

$$V = -\frac{m}{R}$$

indem z. B.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{m}{R^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{m}{R^2} \cdot \frac{x-a}{R} = X$$

wird. Daher ist V oder auch, je nach der Vorzeichenfestsetzung, das Negative davon die Potentialfunktion des betrachteten Kraftfeldes. Bildet man nun

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{m}{R^3} - \frac{3m(x-a)^2}{R^5}$$

und ebenso auch die beiden zweiten Differentialquotienten nach y und z, so erhält man durch Addition

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

wofür man unter Benutzung des Zeichens ∇^2 für den Laplaceschen Operator auch kürzer

$$\nabla^2 V = 0 \tag{256}$$

schreiben kann. Damit ist die Laplacesche Gleichung zunächst für das von einer einzelnen Masse herrührende Feld bewiesen. Wenn aber mehrere Massen vorkommen, ergeben sich die Komponenten der Resultierenden und hiernach auch das Potential durch algebraische Summierung der den einzelnen Massen entsprechenden Werte. Da nun jeder dieser Werte der linearen Gleichung (256) genügt, wird sie auch von der Summe der Werte erfüllt. Damit ist die Gleichung auch für jedes von beliebigen Massen herrührende Kraftfeld bewiesen, falls nur die Stelle xyz, auf die sie angewendet werden soll, nicht mit einer der Massen selbst zusammenfällt. Fällt dagegen xyz in die Massenverteilung hinein, so ist die Betrachtung noch durch eine weitere zu ergänzen und Gl. (256) durch eine allgemeinere zu ersetzen. Auf deren Ableitung kann ich aber hier verzichten, da im folgenden kein Gebrauch von ihr zu machen ist.

Bei der Elastizitätstheorie der Umdrehungskörper kann man nur die Potentialfunktionen von solchen Massenverteilungen verwenden, die selbst symmetrisch um eine X-Achse gruppiert sind. In diesem Falle läßt sich der Laplacesche Operator ∇^2, wie wir schon früher sahen, durch $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathsf{E}^2\right)$ ersetzen und die Laplacesche Gleichung für die Potentialfunktion lautet dann

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathsf{E}^2\right) V = 0. \tag{257}$$

Vergleicht man damit die Grundgleichungen (239) und (241), die hier nochmals angeschrieben werden sollen,

$$\frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathsf{E}^2\right)\xi = 0$$

$$\frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial r} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathsf{D}^2\right)\varrho = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathsf{E}^2\right)e = 0,$$

so bemerkt man, daß in der Tat ein enger formaler Zusammenhang zwischen ihnen besteht, der es gestattet, die bekannten Lösungen der Gl. (257) zur Ermittelung von Lösungen der Grundgleichungen zu benutzen. Vor allem bildet jede Lösung von (257) zugleich eine Lösung der Gleichung für e, übrigens nicht nur bei den Umdrehungskörpern, sondern auch ganz allgemein. Der Weg verläuft nun so, daß man eine solche Lösung für e annimmt und hierauf die ξ und ϱ entsprechend bestimmt. In den einfacheren Fällen kann dies ohne Schwierigkeit geschehen und man erhält damit eine größere Zahl von Lösungen der Grundgleichungen.

Der einfachste Fall besteht darin, daß man

$$e = 0$$

setzt. Dann ist ξ nach der ersten der Grundgleichungen gleich einer Potentialfunktion V, z. B. gleich $\frac{c}{R}$ zu setzen, wenn R den Abstand des Punktes xr von einem außerhalb des Umdrehungskörpers auf der X-Achse liegenden Punkte und c eine beliebige Konstante bedeutet. Da nun

$$e = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \mathsf{D}\varrho$$

ist, erhält man bei der gemachten Annahme

$$\mathsf{D}\varrho = \frac{c}{R^2}\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{c}{R^3}(x+a),$$

was sich leicht integrieren läßt. Man muß dazu beachten, daß hier

$$R^2 = r^2 + (x+a)^2$$

ist, wenn unter a ein beliebiger positiver oder negativer Wert verstanden wird, der nur der Bedingung entspricht, daß der Punkt auf der X-Achse mit der Koordinate a außerhalb des Umdrehungskörpers liegt. Nach Multiplikation mit r geht daher die Differentialgleichung für ϱ über in

$$\frac{\partial}{\partial r}(\varrho r) = \frac{c r}{R^3}(x + a) = - c(x + a)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{R}\right)$$

und die Integration liefert

$$\varrho = - c\frac{x + a}{R r} + \frac{1}{r}\varphi(x). \qquad (258)$$

Man überzeugt sich ohne Schwierigkeit, daß diese Lösung in der Tat auch die zweite Grundgleichung befriedigt, falls man nur die bis dahin unbestimmt gebliebene Funktion $\varphi(x)$ gleich $c_1 x + c_2$ setzt. Das ist übrigens nicht etwa Zufall, sondern muß so sein, wenn ϱ auf dem beschrittenen Wege gefunden wurde. Um dies zu erkennen, führe man an der zweiten Grundgleichung für $e = 0$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathbf{D}^2\right)\varrho = 0$$

die Operation $\mathbf{D}$ aus, womit sie übergeht in

$$\mathbf{D}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2} + \mathbf{E}^2 \cdot \mathbf{D}\varrho = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathbf{E}^2\right)\mathbf{D}\varrho = 0.$$

Da nun ξ eine Potentialfunktion war, ist auch $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ und daher auch $\mathbf{D}\varrho$ eine, so daß also die vorstehende Gleichung auf jeden Fall erfüllt ist, von welcher Potentialfunktion für ξ man auch ausgegangen sein mag. Damit ist gezeigt, daß sicher

$$\mathbf{D}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathbf{D}^2\right)\varrho = 0$$

ist. Nun braucht darum freilich noch nicht $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathbf{D}^2\right)\varrho$ selbst gleich Null zu sein; es könnte auch, wie sich durch Integration ergibt,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathbf{D}^2\right)\varrho = \frac{\psi(x)}{r}$$

sein. Bei der Ermittelung von ϱ trat aber das Glied $\frac{\varphi(x)}{r}$ hinzu, in dem $\varphi(x)$ unbestimmt blieb und man hat

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathbf{D}^2\right)\left(\frac{1}{r}\,\varphi(x)\right) = \frac{1}{r}\,\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}.$$

Durch passende Bestimmung der Funktion φ kann man daher stets erreichen, daß nach Zufügung dieses Gliedes zu ϱ nachher

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathbf{D}^2\right)\varrho = 0$$

wird, d. h. daß die zweite Grundgleichung ebenfalls erfüllt ist.

Einen möglichen Formänderungszustand des Umdrehungskörpers haben wir damit schon gefunden; man kann aber unter der Annahme $e = 0$ auch noch einige andere angeben, die ebenso einfach sind, wie dieser. Man setze etwa

$$\xi = c \lg (R + x + a), \tag{259}$$

womit die Laplacesche Gleichung und hiermit die erste Grundgleichung, wie man sich leicht überzeugt, ebenfalls erfüllt ist. Dann wird

$$\mathbf{D}\varrho = -\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{c}{R+x+a}\left(\frac{x+a}{R} + 1\right) = -\frac{c}{R}$$

und hieraus durch Integration

$$\varrho = -c\,\frac{R}{r} + \frac{1}{r}\,\varphi(x)\cdot \tag{260}$$

Auch hiermit ist die zweite Grundgleichung erfüllt, falls wir $\varphi(x)$ entweder gleich Null oder gleich einer linearen Funktion von x setzen, die man der Lösung für ϱ in dieser Form immer beifügen darf.

Übrigens erhält man aus irgend einer Lösung stets dadurch wieder eine andere, die alle Bedingungen — abgesehen jedoch von den Grenzbedingungen, auf die es hier nicht ankommt — ebenfalls erfüllt, indem man von jener alle Größen ξ, ϱ, e usf. nach x partiell differentiiert. In der Tat entsteht, wenn man dies an der zuletzt angegebenen Lösung ausführt, daraus die zuerst betrachtete. Differentiieren wir dagegen diese nach x, so erhalten wir als weitere Lösung für $e = 0$ nach einfacher Umformung

$$\xi = c\,\frac{x+a}{R^3}; \qquad \varrho = \frac{cr}{R^3}. \tag{261}$$

Dann ist auch noch zu beachten, daß

$$e = 0, \quad \xi = 0, \quad \varrho = \frac{c + c_1 x}{r} \tag{262}$$

eine Lösung ist, die man jeder anderen zufügen darf, wodurch man wieder andere Lösungen findet. Hiervon sei erwähnt, weil nachher davon Gebrauch gemacht werden soll, daß man aus der zuerst gefundenen Lösung durch diese Zufügung und einfache Umformung

$$\xi = \frac{c}{R}; \quad \varrho = -c\,\frac{x+a}{Rr} + \frac{c}{r} = c\,\frac{R-(x+a)}{Rr} =$$
$$= c\,\frac{R^2-(x+a)^2}{Rr(R+x+a)} = c\,\frac{r}{R(R+x+a)} \tag{263}$$

erhält. Die dadurch gefundene Form ist nämlich brauchbarer als die zuerst aufgestellte, weil diese für $r = 0$ einen unendlich großen Wert für ϱ liefern würde. Solche Lösungen sind aber nur für Hohlkörper verwendbar.

Ferner seien noch die Fälle betrachtet, in denen e als eine Potentialfunktion von einfacher Form, also etwa von der Form $\frac{1}{R}$ angenommen wird. Setzt man insbesondere, um zu einfacheren Formeln zu gelangen,

$$e = \frac{m-2}{m}\,c \cdot \frac{1}{R}, \tag{264}$$

so geht die erste Grundgleichung, wenn man dies einsetzt, über in

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathsf{E}^2\right)\xi = c\,\frac{x+a}{R^3},$$

der man leicht genügt, indem man

$$\xi = -c\,\frac{x+a}{2R} \tag{265}$$

setzt. Man beachte nämlich, daß, weil $\frac{1}{R}$ eine Potentialfunktion ist,

$$\mathsf{E}^2\frac{1}{R} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{R} \quad \text{und} \quad \mathsf{E}^2\xi = \frac{c}{2}(x+a)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right)$$

wird, so daß, da

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\frac{c}{2}(x+a)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right) - c\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)$$

ist, im ganzen

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathbf{E}^2\right)\xi = -c\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) = c\frac{x+a}{R^3}$$

herauskommt, womit der Beweis geliefert ist. Aus der Gleichung

$$e = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \mathbf{D}\varrho$$

folgt dann weiter

$$\mathbf{D}\varrho = \frac{m-2}{m}c\frac{1}{R} + c\frac{r^2}{2R^3}$$

wofür man auch

$$\frac{\partial}{\partial r}(\varrho r) = \frac{m-2}{m}c\frac{r}{R} + c\frac{r^3}{2R^3} = \frac{m-2}{m}c\frac{\partial R}{\partial r} - \frac{c}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2}{R} - 2R\right)$$

schreiben kann, so daß man durch Integration, unter Weglassung der Integrationskonstante,

$$\varrho = -c\frac{r}{2R} + \frac{2m-2}{m}c\frac{R}{r} \tag{266}$$

erhält. Um zu vermeiden, daß diese Lösung für $r=0$ unendlich groß wird, kann man sie durch Beifügung eines als Integrationskonstante anzusehenden Gliedes auch auf die Form

$$\varrho = -c\frac{r}{2R} + \frac{2m-2}{m}c\frac{R-(x+a)}{r} =$$

$$= -c\frac{r}{2R} + \frac{2m-2}{m}c\frac{r}{R+x+a} \tag{267}$$

bringen, die sich auch noch weiter umformen läßt.

Außerdem kann man dieser Lösung auch noch die mit beliebigen Koeffizienten multiplizierten früheren Lösungen für den Fall $e=0$ beifügen.

Eine fernere Lösung erhält man durch Differentiation der vorhergehenden Werte nach x und findet damit

$$\left.\begin{aligned} e &= -\frac{m-2}{m}c\frac{x+a}{R^3}; \quad \xi = -c\frac{r^2}{2R^3}; \\ \varrho &= c\frac{r(x+a)}{2R^3} - \frac{2m-2}{m}c\frac{r}{R(R+x+a)}. \end{aligned}\right\} \tag{268}$$

Durch Addition der vorher in Gl. (263) für $e = 0$ gefundenen Lösung läßt sich dies auch überführen in

$$e = -\frac{m-2}{m} c \frac{x+a}{R^3}; \quad \xi = -c \frac{r^2}{2R^3} + \frac{2m-2}{m} \frac{c}{R}; \quad \varrho = c \frac{r(x+a)}{2R^3}. \tag{269}$$

Man könnte auf diesem Wege natürlich noch eine Anzahl anderer Lösungen der Grundgleichungen aufstellen. Zunächst wird man sich aber mit den einfachsten begnügen und zusehen, wie sie sich den Grenzbedingungen anpassen lassen, die etwa in Fällen, die von einiger Wichtigkeit sind, vorliegen könnten. Mit einem solchen Falle, der von praktischer Bedeutung ist, wird sich der nächste Paragraph beschäftigen.

§ 38. Lösung für den durch eine Ebene einseitig begrenzten Körper.

Der Körper soll, wie in Abb. 30 angedeutet, nach allen übrigen Richtungen hin so ausgedehnt sein, daß er als unendlich groß betrachtet werden kann, während auf der ebenen Grenzfläche, die allein in Betracht kommt, Lasten angreifen, die sich auf einen im Verhältnis zu den Abmessungen des Körpers sehr kleinen Bezirk verteilen. Insbesondere kann, wie in Abb. 30 angenommen wurde, die Belastung nur in einer Einzellast P bestehen. Freilich ist ja die Voraussetzung einer solchen Einzellast eigentlich nur eine mathematische Vereinfachung, denn in Wirklichkeit muß eine Last immer über eine, wenn auch nur kleine Fläche verteilt sein. Wenn wir anstatt dessen mit der Einzellast rechnen, so heißt

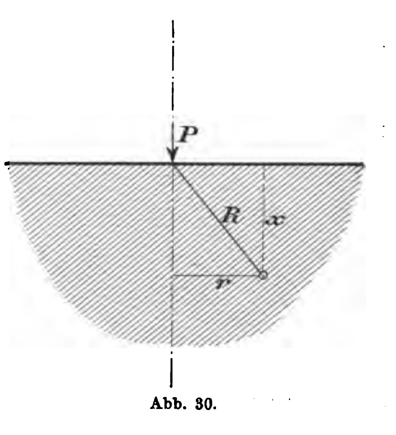


Abb. 30.

dies nur, daß wir auf die nähere Untersuchung des Spannungs- und Formänderungszustandes in der allernächsten Nachbarschaft der Angriffsstelle der Last verzichten und uns nur mit der Beanspruchung jener Stellen beschäftigen wollen, deren Abstand von der Angriffsstelle erheblich größer ist als die Abmessungen der kleinen Fläche, über die sich die Last P verteilt.

Durch diese Fassung der Aufgabe wird ihre Lösung erheblich erleichtert. Denn wenn der Körper so groß ist, wie wir ihn voraussetzen, kommt es auf die besondere Form der äußeren Umgrenzung nicht mehr an und die sonst am schwierigsten zu erfüllende Grenzbedingung für den Mantel des Umdrehungskörpers vereinfacht sich zu der sehr leicht zu erfüllenden Bedingung, daß im unendlichen alle Spannungs- und Formänderungsgrößen zu Null werden müssen. Man hat dann nur noch die weitere Aufgabe, die Lösung den Grenzbedingungen an der ebenen Grenzfläche anzupassen, was in der Tat, wie Boussinesq gezeigt hat, leicht geschehen kann.

Wir bilden zunächst aus den im vorigen Paragraphen besprochenen Lösungen der Grundgleichungen eine neue Lösung, indem wir das Doppelte der Werte in den Gl. (269) nehmen und davon die mit $\frac{(m-2)}{m}$ multiplizierten Werte der Gl. (263) subtrahieren. Dadurch erhalten wir nach einfachen Umformungen

$$\left.\begin{aligned} e &= -2\frac{m-2}{m}c\frac{x+a}{R^3} \\ \xi &= \frac{2m-2}{m}\frac{c}{R} + c\frac{(x+a)^2}{R^3} \\ \varrho &= c\frac{r(x+a)}{R^3} - \frac{m-2}{m}c\frac{r}{R(R+x+a)} \end{aligned}\right\}. \tag{270}$$

Wir setzen ferner in diesen Gleichungen $a = 0$. Damit fällt freilich die anziehende Masse, deren Potentialfunktion zur Ableitung der Lösungen gedient hatte, auf die Grenzfläche des Körpers, wenn wir den Koordinatenursprung mit dem Angriffspunkte der Kraft P in Abb. 30 zusammenfallen lassen.

Wir dürfen daher die Formeln nicht auf den Ursprung selbst anwenden, sondern nur auf den ganzen übrigen Körper. Indessen wäre eine solche Anwendung ohnehin nicht statthaft, weil für $x = 0$ und $r = 0$ zugleich e, ξ und ϱ unendlich groß würden. Aber wir sahen vorher schon, daß wir jedenfalls darauf verzichten müssen, die Verhältnisse in der unmittelbaren Nachbarschaft des Angriffspunktes der Last zu untersuchen. Für die etwas weiter abliegenden Stellen ist die Lösung aber jedenfalls brauchbar und es fragt sich nur noch, ob sie in der Tat den Grenzbedingungen der Aufgabe genügt.

Zunächst werden, wie wir es verlangen mußten, e, ξ, ϱ und daher auch alle Spannungskomponenten für $R = \infty$ zu Null. Es handelt sich also nur noch um die Bedingungen an der ebenen Grenzfläche und zwar muß für sie überall, mit Ausnahme der Stelle $x = 0$, $r = 0$ sowohl σ_x als τ zu Null werden, da die Grenzfläche an den übrigen Stellen frei von äußeren Lasten sein soll.

Wir bilden die Spannungskomponenten nach den Gl. (236) und erhalten, nachdem in Gl. (270) $a = 0$ gesetzt ist,

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= -6Gc\frac{x^3}{R^5} \\ \sigma_r &= -6Gc\frac{xr^2}{R^5} + \frac{m-2}{m}\frac{2Gc}{R(R+x)} \\ \sigma_t &= 2Gc\frac{m-2}{m}\left(\frac{x}{R^3} - \frac{1}{R(R+x)}\right) \\ \tau &= -6Gc\frac{rx^2}{R^5} \end{aligned}\right\}. \tag{271}$$

Um die Ausdrücke auf diese einfache Form zu bringen, muß man freilich zuvor noch einige Umformungen damit vornehmen, bei denen besonders davon Gebrauch zu machen ist, daß $R^2 = r^2 + x^2$ gesetzt werden kann.

Man sieht nun, daß die Grenzbedingung an der ebenen Grenzfläche, die überall, mit Ausnahme der unmittelbaren Nachbarschaft des Angriffspunktes von P, frei von äußeren Kräften sein soll, in der Tat erfüllt ist, da σ_x und τ für $x = 0$

verschwinden, mit Ausnahme der Stelle $x = 0$, $r = 0$, da für diese zugleich R zu Null wird.

Es bleibt uns daher nur noch übrig, die Konstante c zu ermitteln. Wir ziehen dazu eine Ebene senkrecht zur X-Achse in irgend einem Abstande x vom Ursprunge und ermitteln die Summe aller Normalspannungen σ_x, die im ganzen Umfange dieser Ebene von $r = 0$ bis $r = \infty$ übertragen werden. Die Summe der Absolutwerte muß gleich der Last P sein. Das liefert die Gleichung

$$6\,Gcx^3 \int_0^\infty \frac{1}{R^5}\, 2\pi r\, dr = P.$$

Die Integration läßt sich ohne weiteres ausführen, indem man bedenkt, daß

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{R^3}\right) = -3\,\frac{r}{R^5}$$

ist. Daher wird

$$\int_0^\infty \frac{r}{R^5}\, dr = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^3}$$

und die Auflösung nach c liefert

$$c = \frac{P}{4\pi G}\,. \tag{272}$$

Hiermit ist die Aufgabe vollständig gelöst.

Denkt man sich vom Ursprunge aus einen Strahl in beliebiger Richtung ins Innere des Körpers gezogen, so wachsen, wenn man auf diesem Strahle fortschreitet, x, r und R in demselben Veshältnisse an. Aus den Gleichungen (271) folgt daher, daß alle vier Spannungskomponenten umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung vom Ursprunge sind, so lange man auf demselben Strahle bleibt. Daher schneiden auch alle Spannungstrajektorien, die man in den Meridianschnitt des Körpers eintragen kann, jeden vom Ursprung ausgehenden Strahl unter gleichen Winkeln. Die Spannungstrajektorien lassen sich daher auf zeichnerischem Wege leicht ermitteln, indem man für eine Anzahl von Punkten auf einer

zur X-Achse senkrechten Ebene nach den Lehren des dritten Bandes die Richtungen der Hauptspannungen berechnet und sie in die Zeichnung einträgt, denn für alle anderen parallel dazu gezogenen Ebenen sind die Richtungen in jenen Punkten, die auf dem gleichen Strahle liegen, dieselben. Nach dieser Vorarbeit lassen sich die Spannungstrajektorien mit genügender Genauigkeit in die Zeichnung eintragen, so daß sie überall in den vorgeschriebenen Richtungen fortschreiten.

Bemerkenswert ist noch, daß in jedem Flächenelemente, das senkrecht zur X-Achse steht, eine resultierende Spannung übertragen wird, deren Richtung durch den Ursprung geht. Die Komponenten dieser resultierenden Spannung sind nämlich σ_x und τ, die sich, wie aus den Gleichungen (271) hervorgeht, wie $x:r$ verhalten. Die Größe der resultierenden Spannung ergibt sich nach dem Pythagoräischen Lehrsatze zu

$$6\,Gc\,\frac{x^2}{R^4}\cdot$$

Legt man einen Kreis, der die Grenzfläche des Körpers im Ursprunge berührt, so ist nach einem bekannten planimetrischen Satze für alle Punkte dieses Kreises $\frac{R^2}{x}$ gleich dem Durchmesser des Kreises. Daraus folgt, daß die resultierende Spannung für alle zur X-Achse senkrecht stehenden Flächenelemente, die man durch die Punkte dieses Kreises legen kann, gleich groß ist.

Bringt man auf den horizontalen Erdboden eine Last auf, die sich als Einzellast ansehen läßt, so gleicht der Fall in hohem Grade dem hier behandelten. Trotzdem trifft aber die aufgestellte Lösung in diesem Falle nicht zu. Man kann dies beweisen, indem man mit Hülfe einer Feinmeßvorrichtung die Einsenkungen ξ mißt, die in der Nähe der belasteten Stelle zustande kommen. Nach Gl. (270) müßte ξ für $x + a = 0$ umgekehrt proportional dem Abstande von der belasteten Stelle sein, d. h. die vorher ebene Oberfläche müßte in ein Rotationshyperboloid übergehen. In Wirklichkeit nehmen aber, wie der Versuch lehrt, die Einsenkungen viel schneller mit dem

Abstande von der belasteten Stelle ab. Der Grund für diesen Widerspruch ist darin zu erblicken, daß der Erdboden den elastischen Grundgleichungen nicht folgt. Wir sahen nämlich vorher, daß für jedes zur X-Achse senkrecht stehende Flächenelement die resultierende Spannung durch den Ursprung geht. Bei einer Erdschüttung kann aber die resultierende Spannung für jedes Flächenelement nicht um mehr als um den Reibungswinkel von der Normalen abweichen. Im anderen Falle tritt ein Gleiten ein, durch das die Formänderung und die Spannungsverteilung vollständig geändert wird. Außerdem müßten nach den Gl. (271) in der Oberfläche, also für $x = 0$, Zugspannungen σ_r auftreten, die eine Erdschüttung ebenfalls nicht übertragen kann. Bei einem festen elastischen Körper darf man dagegen eine Übereinstimmung des Verhaltens mit den aufgestellten, und zwar zuerst von Boussinesq aufgestellten Formeln erwarten. Ob mit solchen Körpern schon Versuche zur Prüfung der Theorie angestellt worden sind, ist mir nicht bekannt.

Schließlich bemerke ich noch, daß man die Lösung natürlich auch auf den Fall übertragen kann, daß mehrere Lasten zusammenwirken, falls sie nur so nahe zusammenliegen, daß ihre Abstände als klein gegenüber der Ausdehnung des ganzen Körpers angesehen werden können. Die zugehörigen Spannungszustände lagern sich dann einfach übereinander. Insbesondere kann man auch den Fall behandeln, daß sich eine Last P etwa gleichförmig über eine gewisse Fläche verteilt. In größeren Abständen von der Fläche gilt dann wieder einfach die vorige Lösung. Man kann aber in diesem Falle auch den Spannungszustand in der Nachbarschaft der belasteten Fläche untersuchen. Zu jedem Flächenelement gehört nämlich nur ein Teil der Last, der unendlich klein von der zweiten Ordnung ist und die Spannungskomponenten bleiben daher auch in kleineren Abständen davon nach den Formeln endlich. Die Ausführung der Integrationen, die nötig wären, um die Beiträge aller Lastdifferentiale zu dem ganzen Spannungszustande zu summieren, ist freilich zu umständlich. Für praktische Zwecke könnte man sie aber genau genug durch

eine mechanische Quadratur ersetzen, indem man die gleichförmig verteilte Last durch eine begrenzte Zahl von Einzellasten ersetzte, deren Beiträge nach den Gleichungen (271) berechnete und diese hierauf summierte.

Schwieriger ist die andere Frage zu beurteilen, wie sich die Last P verteilt, wenn man eine kleine Platte, die man als starr betrachten kann, auf die ebene Grenzfläche eines größeren Körpers aus nachgiebigerem Material mit der Kraft P aufpreßt. Dann muß ξ innerhalb der ganzen Druckfläche konstant sein, wenigstens wenn die Last P durch den Schwerpunkt der Druckfläche geht. Bezeichnet man den auf ein Flächenteilchen dF der Druckfläche entfallenden Anteil der Last P mit $p\,dF$, so muß das über die ganze Druckfläche ausgedehnte Integral

$$\int \frac{p\,dF}{R}$$

für alle Punkte der Druckfläche denselben Wert annehmen. In einfachen Fällen, z. B. bei einer kreisförmigen Druckfläche, kann man durch Probieren genau genug eine Lastverteilung ausfindig machen, bei der diese Bedingung ungefähr erfüllt ist. Anstatt dessen kann man sich auch auf die Potentialtheorie stützen, denn die Aufgabe ist in der Tat dieselbe, wie die, die Verteilung der Elektrizität auf einer elektrisch geladenen leitenden Scheibe von der gegebenen Gestalt zu ermitteln. Man erkennt daraus schon, daß der Druck p nach außen hin und namentlich nach dem Rande zu stark anwachsen muß. Am Rande selbst wird er sogar theoretisch unendlich groß, so daß diese Stelle ausgenommen werden muß. Das ist deshalb möglich, weil in einem unendlich schmalen Ringe am Rande trotz des unendlich großen p nur ein unendlich kleiner Teil der ganzen Last übertragen wird.

Auf die weitere Behandlung mit Hülfe der Potentialtheorie gehe ich aber hier nicht ein; ich bemerke nur, daß auch auf diesem Wege keine strenge Erledigung der Aufgabe möglich ist, insofern nämlich dabei keine Rücksicht auf die Reibungen in der Druckfläche genommen werden kann. Zu einer angenäherten Lösung, wie sie für die Praxis erwünscht sein kann, reicht aber schon das angegebene einfachere Hülfsmittel aus, das zwar erhebliche Rechnungen bei der Ausführung erforderlich macht, dafür aber kein Studium der Potentialtheorie für das Ellipsoid verlangt, aus dem man sich die Scheibe hervorgegangen denken kann. — Im übrigen verweise ich noch auf die hiermit verwandte Theorie von Hertz in § 48.

§ 39. Die Wärmespannungen.

Von den Wärme- oder Temperaturspannungen war im zweiten und dritten Bande schon wiederholt die Rede. Die allgemeine Theorie dieser Spannungen ist aber dabei noch nicht zur Sprache gekommen und soll erst jetzt entwickelt werden. Ich bringe sie in diesem Abschnitte unter, weil sie für die Umdrehungskörper, namentlich für Hohlzylinder von größerer praktischer Bedeutung ist. Die allgemeinen Gleichungen, die ich zunächst ableiten werde, gelten indessen auch für einen Körper von beliebiger Gestalt.

Bei einer gewissen Temperatur sei der Körper spannungslos. Es fragt sich dann, was für Spannungen und Formänderungen entstehen, wenn der Körper ungleichmäßig erwärmt oder abgekühlt wird, so daß die Temperatur für jeden Punkt des Körpers beliebig gegeben ist. Wenn man will, kann man freilich die Aufgabe auch etwas allgemeiner stellen, nämlich so, daß das Gesetz der Temperaturverteilung selbst erst aus den Bedingungen, die an der Oberfläche bestehen, nach der Lehre von der Wärmeleitung ermittelt werden soll. Wenn man praktische Zwecke im Auge hat, kann aber auf diese allgemeinere Behandlung verzichtet werden, da es hierfür genügt, eine bestimmte schätzungsweise festgestellte Temperaturverteilung der Spannungsberechnung zu Grunde zu legen. Natürlich genügt dann auch, der Unsicherheit der Rechnungsunterlagen entsprechend, schon eine ziemlich grobe Annäherung bei der Spannungsberechnung.

Über die praktischen Anwendungen, an die hierbei zu denken ist, bemerke ich noch, daß zunächst der Fall eines Schornsteins in Frage kommt, bei dem durch die verschiedene Temperatur innerhalb der Wandung sehr erhebliche Temperaturspannungen auftreten. Mit dieser Anwendung hat sich insbesondere Herr Dr. Leon an der Technischen Hochschule in Wien in einigen Schriften beschäftigt. Außerdem ist die Theorie auch noch für gewisse Maschinenteile an den großen neueren Gasmaschinen, die einerseits mit den heißen Verbrennungsgasen, andererseits mit dem Kühlwasser in Berührung

sind, von erheblicher praktischer Bedeutung. Daß man in allen diesen Fällen der Anwendung nur auf eine ungefähre Schätzung der Temperaturunterschiede an verschiedenen Stellen des Körpers angewiesen ist, liegt auf der Hand. Man kann und muß sich daher auch zufrieden geben, wenn die auf eine solche Schätzung gegründete Spannungsberechnung sich selbst nur als eine Schätzung darstellt.

Die Formänderung, die ein Volumenelement $dx\,dy\,dz$ gegenüber dem Ausgangszustande erfahren hat, setzt sich in unserem Falle aus zwei Bestandteilen zusammen. Der eine rührt von der Temperaturänderung her und besteht in einer nach allen Richtungen hin gleichförmigen Ausdehnung oder Zusammenziehung; der andere wird durch die Spannungen verursacht. Bezeichnen wir, wie früher, die durch die Spannungen bewirkte Dehnung in der X-Richtung mit ε_x, den Temperaturkoeffizienten mit α und die Temperaturerhöhung, die übrigens auch negativ sein kann, mit t, so ist die gesamte Dehnung in der X-Richtung

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \varepsilon_x + \alpha t. \tag{273}$$

Winkeländerungen kommen durch die Temperaturerhöhung an sich nicht zu Stande; sie hängen vielmehr nur von den Schubspannungen ab, so daß für diese dieselben Beziehungen wie bei den übrigen Aufgaben der Elastizitätstheorie, nämlich

$$\tau_{xy} = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) \tag{274}$$

usf. bestehen. Die Normalspannungen σ_x usf. findet man dagegen aus den früheren Formeln (27), indem man von den gesamten Dehnungen $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ usf. zuerst jenen Teil abzieht, der von der Ausdehnung durch die Wärme allein herrührt. Benutzt man jetzt den Buchstaben e für die gesamte kubische Ausdehnung und e' für jenen Teil, der von den Spannungen herrührt, so ist

$$e' = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

und daher, wie aus Gl. (273) ersichtlich ist,

$$e' = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} - 3\alpha t = e - 3\alpha t \tag{275}$$

und die Spannungskomponenten werden mit entsprechender Abänderung der Gl. (27) gefunden zu

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= 2G\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{e}{m-2} - \frac{m+1}{m-2}\alpha t\right)\\
\sigma_y &= 2G\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{e}{m-2} - \frac{m+1}{m-2}\alpha t\right)\\
\sigma_z &= 2G\left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{e}{m-2} - \frac{m+1}{m-2}\alpha t\right)
\end{aligned}\right\}. \tag{276}$$

Setzt man diese Ausdrücke für die Spannungskomponenten in die Gleichungen (24) ein, die das Gleichgewicht des Volumenelementes zum Ausdrucke bringen, so erhält man, mit $X = Y = Z = 0$ die den elastischen Grundgleichungen (32) entsprechenden Differentialgleichungen für $\xi \eta \zeta$, nämlich

$$\left.\begin{aligned}
\nabla^2 \xi + \frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial x} - 2\frac{m+1}{m-2}\alpha\frac{\partial t}{\partial x} &= 0\\
\nabla^2 \eta + \frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial y} - 2\frac{m+1}{m-2}\alpha\frac{\partial t}{\partial y} &= 0\\
\nabla^2 \zeta + \frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial z} - 2\frac{m+1}{m-2}\alpha\frac{\partial t}{\partial z} &= 0
\end{aligned}\right\}. \tag{277}$$

Diese Gleichungen sind dieselben wie für einen Körper ohne Wärmespannungen, auf den äußere Massenkräfte XYZ einwirken, die zu einem Potentiale gehören, das proportional mit t ist. Dieser Umstand ist sehr beachtenswert, denn es geht daraus hervor, daß man in vielen Fällen die Wärmespannungen dadurch ermitteln kann, daß man sie mit den durch äußere Massenkräfte als Lasten hervorgebrachten vergleicht. Gewöhnlich kann man sich nämlich viel schneller und zutreffender eine ungefähre Vorstellung davon bilden, welche Beanspruchung des Materials man etwa bei gegebenen Lasten zu erwarten hat, als wenn es sich um eine Abschätzung der Wärmespannungen handelt.

Die vorhergehenden Gleichungen gelten noch allgemein. Für den Fall eines Umdrehungskörpers, von dem vorauszusetzen ist, daß die Temperatur rings um die Achse symmetrisch

verteilt ist, können sie in derselben Weise wie in § 35 auf eine diesem Falle angepaßte einfachere Form gebracht werden. Man hat dann für die Spannungskomponenten

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 2G\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{e}{m-2} - \frac{m+1}{m-2}\alpha t\right) \\ \sigma_r &= 2G\left(\frac{\partial \varrho}{\partial r} + \frac{e}{m-2} - \frac{m+1}{m-2}\alpha t\right) \\ \sigma_t &= 2G\left(\frac{\varrho}{r} + \frac{e}{m-2} - \frac{m+1}{m-2}\alpha t\right) \\ \tau &= G\left(\frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial \varrho}{\partial x}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (278)$$

und an die Stelle der elastischen Grundgleichungen (239) treten die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathbf{E}^2\right)\xi + \frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial x} - 2\frac{m+1}{m-2}\alpha\frac{\partial t}{\partial x} &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathbf{D}^2\right)\varrho + \frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial r} - 2\frac{m+1}{m-2}\alpha\frac{\partial t}{\partial r} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (279)$$

Hierbei ist noch hinzuzufügen, daß die gesamte kubische Ausdehnung e

$$e = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \mathbf{D}\varrho \qquad (280)$$

zu setzen ist. Die Aufgabe besteht nun darin, für ein als Funktion von x und r gegebenes t Lösungen dieser Grundgleichungen zu finden, die mit den Grenzbedingungen verträglich sind. Allgemein kann sie nicht gelöst werden, wohl aber für einzelne Fälle, die von praktischer Wichtigkeit sind.

Handelt es sich um einen stationären Wärmezustand, so befolgt die Temperatur t nach der Fourierschen Theorie der Wärmeleitung überall innerhalb des Körpers die Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathbf{E}^2\right)t = 0 \qquad (281)$$

und wenn man eine dieser Gleichung entsprechende Temperaturverteilung voraussetzt, erhält man aus den Gl. (279), wenn man an der ersten die Operation $\frac{\partial}{\partial x}$ an der zweiten die Ope-

ration $\mathbf{D}$ ausführt und hierauf addiert, unter Berücksichtigung von Gl. (280)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathbf{E}^2\right) e = 0$$

und ebenso werden für ξ und ϱ, indem man an der ersten der Gl. (279) die Operation $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathbf{E}^2\right)$ oder an der zweiten die Operation $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathbf{D}^2\right)$ ausführt, die früheren Differentialgleichungen (242) und (243) nämlich

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathbf{E}^2\right)^2 \xi = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathbf{D}^2\right)^2 \varrho = 0$$

gefunden. Dadurch ergibt sich die Möglichkeit, an die Lösungen in den vorhergehenden Paragraphen unmittelbar anzuknüpfen.

§ 40. Die Wärmespannungen im Hohlzylinder.

Das einfachste und praktisch wichtigste Beispiel für die vorhergehenden Betrachtungen bildet ein Hohlzylinder, der innen auf einer andern (und zwar gewöhnlich auf einer höheren) Temperatur gehalten wird, als außen. Abgesehen von den Rohrenden, an denen die Abkühlungs- oder Wärmezuführungsbedingungen von den besonderen Verhältnissen der Befestigung oder überhaupt der Nachbarschaft anderer Körper abhängig sind, können wir sonst überall

$$\frac{\partial t}{\partial x} = 0$$

setzen. Wenn es sich um einen stationären Zustand handelt, ist dann nach der Wärmeleitungsgleichung (281)

$$\mathbf{E}^2 t = 0$$

woraus durch Integration

$$t = a_1 \lg r + a_2$$

gefunden wird. Die Integrationskonstanten a_1 und a_2 ergeben sich aus den vorgeschriebenen Temperaturen t_i und t_a am inneren und äußeren Zylindermantel, d. h. für r_i und r_a. Man erhält dann für t

$$t = \frac{t_i \lg \frac{r_a}{r} + t_a \lg \frac{r}{r_i}}{\lg \frac{r_a}{r_i}}$$

und die Integrationskonstanten a_1 und a_2 sind

$$a_1 = -\frac{t_i - t_a}{\lg \frac{r_a}{r_i}}; \quad a_2 = \frac{t_i \lg r_a - t_a \lg r_i}{\lg \frac{r_a}{r_i}}.$$

Versuchsweise setzen wir ferner

$$\xi = c_1 x + c_2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varrho}{\partial x} = 0$$

wenn mit c_1 und c_2 zwei Konstanten bezeichnet werden. Hieraus folgt

$$e = c_1 + \mathbf{D}\varrho; \quad \frac{\partial e}{\partial x} = 0; \quad \frac{de}{dr} = \mathbf{D}^2 \varrho.$$

Mit diesem Ansatze ist die erste der Grundgleichungen ohne weiteres erfüllt, da jedes Glied für sich zu Null wird. Die zweite geht über in

$$\frac{2m-2}{m-2} \mathbf{D}^2 \varrho - 2\frac{m+1}{m-2} \alpha \frac{\partial t}{\partial r} = 0,$$

woraus sich durch Integration nach r und zwar zunächst noch für jedes beliebige Abhängigkeitsgesetz zwischen t und r

$$\mathbf{D}\varrho = \frac{m+1}{m-1} \alpha t + C_1$$

ergibt. Die Integrationskonstante C_1 kann x nicht enthalten, da die übrigen Glieder in der Gleichung frei davon sind. Setzt man für t jetzt den vorher dafür aufgestellten Ausdruck ein, so läßt sich die Gleichung nochmals integrieren und man erhält nach einfacher Rechnung

$$\varrho = \frac{m+1}{m-1} \alpha \left(a_1 \frac{r}{2} \lg r - a_1 \frac{r}{4} + a_2 \frac{r}{2} \right) + C_1 \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r},$$

wobei C_2 eine neue Integrationskonstante ist, die ebenfalls von x unabhängig sein muß. Man überzeugt sich in der Tat

nachträglich leicht, daß durch diesen Ausdruck die Differentialgleichung für ϱ befriedigt wird.

Hiermit haben wir eine Lösung aufgestellt, die den Grundgleichungen genügt und es fragt sich nur noch, wie es sich mit den Grenzbedingungen verhält. Dazu bilden wir nach den Gleichungen (278) die Spannungskomponenten:

$$\sigma_x = 2\,G\left(\frac{m-1}{m-2}\,c_1 + \frac{C_1}{m-2} - \frac{m+1}{m-1}\,\alpha t\right)$$

$$\sigma_r = 2\,G\left(\frac{c_1}{m-2} + \frac{C_1 m}{2(m-2)} + \frac{m+1}{2(m-1)}\,\alpha\left(\frac{a_1}{2} - t\right) - \frac{C_2}{r^2}\right)$$

$$\sigma_t = 2\,G\left(\frac{c_1}{m-2} + \frac{C_1 m}{2(m-2)} - \frac{m+1}{2(m-1)}\,\alpha\left(\frac{a_1}{2} + t\right) + \frac{C_2}{r^2}\right)$$

$$\tau = 0.$$

Am inneren und äußeren Mantel des Hohlzylinders sollen keine Lasten angreifen. Wir müssen daher durch passende Bestimmung der bisher willkürlich gebliebenen Integrationskonstanten C_1 und C_2 dafür sorgen, daß σ_r an diesen Stellen zu Null wird; τ ist ohnehin überall gleich Null. Die Auflösung der Gleichungen $\sigma_r = 0$ für $r = r_i$ und $r = r_\alpha$ liefert

$$\frac{C_1 m}{2(m-2)} = \frac{m+1}{2(m-1)}\,\alpha\,\frac{r_i^2 t_a - r_i^2 t_i}{r_a^2 - r_i^2} - \left(\frac{c_1}{m-2} + \frac{m+1}{4(m-1)}\,\alpha\, a_1\right)$$

$$C_2 = -\frac{m+1}{2(m-1)}\,\frac{r_i^2 r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}\,\alpha\,(t_i - t_a).$$

Die Ausdrücke für die Spannungskomponenten gehen, wenn man diese Werte einsetzt, über in

$$\sigma_x = 2\,G\left(\frac{m+1}{m}\,c_1 + \frac{m+1}{m(m-1)}\,\alpha\,\frac{r_a^2 t_a - r_i^2 t_i}{r_a^2 - r_i^2} - \frac{m+1}{2m(m-1)}\,\alpha\, a_1 - \frac{m+1}{m-1}\,\alpha\, t\right)$$

$$\sigma_r = 2\,G\,\frac{m+1}{2(m-1)}\,\alpha\left(\frac{r_a^2 t_a - r_i^2 t_i}{r_a^2 - r_i^2} + \frac{r_i^2 r_a^2}{r^2}\cdot\frac{t_i - t_a}{r_a^2 - r_i^2} - t\right)$$

$$\sigma_t = 2\,G\,\frac{m+1}{2(m-1)}\,\alpha\left(\frac{r_a^2 t_a - r_i^2 t_i}{r_a^2 - r_i^2} - \frac{r_i^2 r_a^2}{r^2}\cdot\frac{t_i - t_a}{r_a^2 - r_i^2} - (a_1 + t)\right).$$

Nun handelt es sich noch um die Grenzbedingungen an den Endflächen des Hohlzylinders, über die bisher noch nichts ausgemacht war. Jedenfalls sind die Endflächen bei der be-

trachteten Lösung nicht frei von äußeren Kräften. Die Schubspannungen sind zwar auch dort, wie überall, gleich Null, aber die Normalspannungen können nicht zum Verschwinden gebracht werden, wie es sein müßte, wenn der Zylinder an beiden Enden frei von allen Verbindungen sein sollte. Dagegen können wir wenigstens die Konstante c_1, über die wir bisher noch nach Belieben verfügen durften, so wählen, daß die Lasten an jedem Ende unter sich ein Gleichgewichtssystem bilden. Dazu ist

$$\int \sigma_x \, dF = 0$$

zu setzen, wobei die Integration über die ganze Querschnittsfläche zu erstrecken ist. Das Integral kann leicht berechnet werden, da in dem Ausdruck für σ_x nur t veränderlich, alle übrigen Größen dagegen konstant sind. Schreibt man zunächst

$$\int t \, dF = t_m F$$

so ist damit t_m als der Durchschnittswert der Temperatur definiert und wenn man den Ausdruck für t einsetzt und integriert findet man

$$t_m = a_1 \cdot \frac{r_a^2 \lg r_a - r_i^2 \lg r_i}{r_a^2 - r_i^2} - \frac{a_1}{2} + a_2$$

oder, wenn man die Konstanten a_1 und a_2 in den Temperaturen t_i und t_a ausdrückt,

$$t_m = \frac{r_a^2 t_a - r_i^2 t_i}{r_a^2 - r_i^2} + \frac{t_i - t_a}{2 \lg \frac{r_a}{r_i}}.$$

Die Bedingung dafür, daß die Summe der Normalspannungen für einen Querschnitt verschwinden soll, läßt sich nun dahin ausdrücken, daß

$$\sigma_x = 2 G \frac{m+1}{m-1} \alpha (t_m - t)$$

zu setzen ist. Welchen Wert man der Konstanten c_1 zu diesem Zwecke geben muß, läßt sich aus dem Vergleiche dieses Ausdrucks mit dem früher für σ_x gegebenen sofort entnehmen; es ist aber nicht nötig, den Wert anzuschreiben.

Überlegen wir uns jetzt, was mit dieser Lösung gewonnen ist. Wenn man die Wärmespannungen berechnen soll, kommt es auch sehr wesentlich darauf an, welchen mechanischen Bedingungen die Enden des Hohlzylinders unterworfen sind, insbesondere also, ob sich der Zylinder frei ausdehnen oder zusammenziehen kann oder ob er daran durch die Befestigung an den Enden gehindert ist. In der Regel wird die Aufgabe dahin zu verstehen sein, daß der Zylinder an beiden Enden als frei betrachtet werden soll und um auf eine diesem Falle anzupassende Lösung zu kommen, wurde vorher schon $\int \sigma_x dF$ gleich Null gesetzt. Tatsächlich gefunden haben wir aber doch nur jene Spannungen, die durch das Zusammenwirken der Temperaturunterschiede und der den σ_x entsprechenden Lasten an den Endquerschnitten hervorgerufen werden. Von unserer Lösung abzuziehen sind daher, wenn die Zylinderenden frei sein sollen, erst noch jene Spannungen, die von diesen Lasten für sich hervorgerufen werden.

Aber man beachte, daß diese Lasten wegen der Wahl der Konstanten c_1 an jedem Zylinderende unter sich ein Gleichgewichtssystem bilden. Ein solches Gleichgewichtssystem dicht zusammengedrängter Lasten kann einen Spannungs- und Formänderungszustand von merklichem Betrage nur in der Nähe der Angriffsstellen der Lasten hervorrufen, während er an allen etwas weiter abliegenden Stellen als verschwindend klein zu betrachten ist. Das heißt mit anderen Worten, daß die aufgestellten Formeln die Wärmespannungen für den Fall freier Zylinderenden an allen von diesen Enden etwas weiter abliegenden Stellen bereits richtig darstellen.

An den Zylinderenden selbst ist freilich der Spannungszustand von ganz anderer Art und weit schwieriger zu ermitteln; ich werde darauf noch zurückkommen. Im übrigen aber kann man die Formeln ohne weiteres zu praktischen Berechnungen benutzen. Dazu ist noch nötig, die Größtwerte der Spannungen aufzusuchen, von denen die Beanspruchung des

Materials abhängt. Auf σ_r kommt es dabei, wie man sofort sieht, nicht an, da es am innern und äußeren Mantel verschwindet und dazwischen auch keine besonders großen Werte annehmen kann. Die andern Hauptspannungen (denn wegen $\tau = 0$ sind sowohl σ_t als σ_x und σ_r Hauptspannungen) nehmen dagegen ihre Größtwerte am inneren und äußeren Mantel an. Für σ_x folgt dies daraus, daß in dem Ausdrucke dafür nur t veränderlich ist, das sich von innen nach außen hin stets in demselben Sinne ändert. In dem Ausdrucke für σ_t kommt außer t noch r als veränderliche Größe vor; man sieht aber daß sich die beiden mit r und t behafteten Glieder ebenfalls beide in demselben Sinne ändern, wenn man r wachsen läßt. Wir brauchen also nur auf die Werte am inneren und äußeren Zylindermantel zu achten. Dabei zeigt sich, wenn man $r = r_a$ oder $r = r_i$ in die Formel einsetzt, daß an beiden Stellen σ_x und σ_t nach Größe und Vorzeichen miteinander übereinstimmen. Man erhält

$$\left.\begin{aligned} &\text{1) für } r = r_i \\ &\sigma_x = \sigma_t = -2G\frac{m+1}{m-1}\alpha(t_i - t_a)\left(\frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} - \frac{1}{2\lg\frac{r_a}{r_i}}\right) \\ &\text{2) für } r = r_a \\ &\sigma_x = \sigma_t = -2G\frac{m+1}{m-1}\alpha(t_i - t_a)\left(\frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} - \frac{1}{2\lg\frac{r_a}{r_i}}\right) \end{aligned}\right\} . \qquad (282)$$

Diese einfachen Formeln sind, wie es scheint, zuerst in der polnisch geschriebenen Dissertation eines Herrn Dr. Huber aufgestellt worden; der Verfasser hat mir seine Abhandlung zwar zugeschickt, ich bin aber der polnischen Sprache nicht mächtig und daher über den Inhalt nur unvollkommen unterrichtet. — Für den Fall, daß die Wanddicke des Hohlzylinders klein ist gegenüber dem Halbmesser ist es übrigens bequemer, die Formeln noch ein wenig umzugestalten, indem man von den bekannten Reihenentwickelungen für $\lg(1 + x)$ usf. Ge-

brauch macht. Bezeichnet man das arithmetische Mittel von r_i und r_a mit r_m und die Wanddicke mit h, so hat man

$$\lg \frac{r_a}{r_i} = \lg \frac{r_m + \frac{1}{2}h}{r_m - \frac{1}{2}h} = \lg \frac{1 + \frac{h}{2r_m}}{1 - \frac{h}{2r_m}} = \frac{h}{r_m} + \frac{h^3}{12 r_m^3} + \cdots$$

Entwickelt man ebenso das erste Glied in der Klammer der Gleichungen (282), so erhält man unter Unterdrückung der von höherer Ordnung kleinen Größen

$$\frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} - \frac{1}{2 \lg \frac{r_a}{r_i}} = \frac{1}{2} + \frac{h}{6 r_m}$$

$$\frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} - \frac{1}{2 \lg \frac{r_a}{r_i}} = -\frac{1}{2} + \frac{h}{6 r_m}$$

und an Stelle der Gleichungen (282) kann man daher bei Röhren von kleiner Wanddicke genau genug auch setzen:

$$\left.\begin{array}{c} 1) \text{ für } r = r_i \\ \sigma_x = \sigma_t = -2G \frac{m+1}{m-1} \alpha (t_i - t_a) \left(\frac{1}{2} + \frac{h}{6 r_m}\right) \\ 2) \text{ für } r = r_a \\ \sigma_x = \sigma_t = +2G \frac{m+1}{m-1} \alpha (t_i - t_a) \left(\frac{1}{2} - \frac{h}{6 r_m}\right) \end{array}\right\} . \quad (283)$$

Man hat daher, wenn t_i größer ist als t_a, innen Druck- und außen Zugspannungen von annähernd gleicher Größe. Man erkennt auch, daß der Betrag dieser Spannungen bei gleichem Temperaturunterschiede $t_i - t_a$ nur wenig von der Wanddicke abhängig ist. Da aber in der Regel der Temperaturunterschied bei geringer Wanddicke kleiner ausfallen wird, als bei großer Wanddicke, sind die dicken Röhren einem Bruche durch die Wärmespannungen mehr ausgesetzt, als die dünnwandigen. Diese Beobachtung hat man übrigens schon längst gemacht und man stellt daher z. B. die Reagenzgläser der Chemiker mit sehr geringer Wanddicke

her. Auch die dünnwandigen Lampenzylinder springen nicht so leicht wie die dickwandigen.

Sind die Zylinderenden nicht frei, wie bisher vorausgesetzt war, sondern zwischen zwei Platten eingespannt, die sich einer Ausdehnung widersetzen, so hat man in der früheren Formel für σ_x die Konstante c_1 gleich Null zu setzen, anstatt sie so zu bestimmen, daß $\int \sigma_x dF$ zu Null wird. Dadurch ändert sich nur σ_x um einen für den ganzen Querschnitt konstanten Betrag, während σ_r und σ_t ungeändert bleiben.

§ 41. Das Verhalten der Zylinderenden.

Wir setzen jetzt wieder voraus, daß die Enden frei seien. Um die Wärmespannungen in ihrer Nachbarschaft zu ermitteln, haben wir noch die Aufgabe zu lösen, jene Spannungen zu berechnen, die von Lasten an diesen Enden herrühren, die sich nach dem vorher für σ_x festgestellten Gesetze über den Endquerschnitt verteilen. Verhältnismäßig leicht gelingt dies, wenn man den Zylinder als dünnwandig voraussetzen darf, was gewöhnlich zulässig sein wird. Zunächst soll aber wenigstens mit ein paar Worten auf den viel schwieriger zu behandelnden Fall des dickwandigen Zylinders eingegangen werden.

Man hat es dann mit einer Aufgabe von der in § 36 behandelten Art zu tun und der damals besprochene Weg vermag auch hier, wenn auch nur unter Aufwendung sehr umfangreicher Rechnungen, zum Ziele zu führen. Dabei ist zu beachten, daß auch die beiden in § 36 verworfenen Lösungen der Differentialgleichung (245), die für $r = 0$ zu unendlich großen Werten führen, hier beizubehalten sind, da dieser Umstand die Brauchbarkeit der Lösung beim Hohlzylinder nicht hindert. Infolgedessen treten in die Lösung bei den Gleichungen (254) noch zwei neue mit willkürlichen Konstanten behaftete Glieder ein, wogegen auch zu den in den Gleichungen (255) ausgesprochenen Grenzbedingungen noch zwei weitere Bedingungsgleichungen hinzukommen, die ausdrücken, daß auch für $r = r_i$ die Spannungen σ_r und τ zu Null werden müssen. Die vier Gleichungen sind dann aufzulösen nach den vier Unbekannten, nämlich den Verhältnissen der vier Inte-

grationskonstanten zueinander und nach der in jenem Paragraphen eingeführten Konstanten α. Das liefert für α eine transzendente Gleichung mit unendlich vielen (im allgemeinen komplexen) Wurzeln, die ebensovielen Einzellösungen entsprechen, von denen jede den Bedingungen an den beiden Zylindermänteln genügt. Aus diesen bleibt dann noch jene Lösung zusammenzusetzen, die auch die Grenzbedingung am Zylinderende befriedigt, d. h. der dort vorgeschriebenen Spannungsverteilung σ_x genau oder wenigstens mit genügender Annäherung entspricht.

Damit ist wenigstens der Plan vorgezeichnet, nach dem man vorgehen könnte; aber man sieht schon, daß er praktisch kaum durchzuführen ist, da er viel zu umfangreiche Rechnungen erfordern würde. Dazu kommt noch, daß selbst mit einer in diesem Sinne strengen Lösung der Aufgabe gar nicht viel gewonnen wäre, da die der ganzen Betrachtung zu Grunde liegende Voraussetzung über die Temperaturverteilung an den Enden des Hohlzylinders sicher nicht mehr erfüllt ist. Wie sich die Temperatur dort verteilt, ist vielmehr von den besonderen Umständen des einzelnen Falles abhängig und man wird sich dafür stets mit einer ganz ungefähren Einschätzung begnügen müssen. Daher hat eine genaue Rechnung, die sich auf einer so unsicheren Grundlage aufbaut, überhaupt keine Berechtigung oder wenigstens keinen praktischen Wert.

Bei einem dünnwandigen Zylinder befindet man sich dagegen in viel günstigerer Lage. Zunächst insofern, als die wirklich eintretende Temperaturverteilung von der vorher vorausgesetzten auch an den Zylinderenden weniger abweichen wird und dann weil sich die Rechnung, wenn auch nicht ganz streng, so doch mit vollständig genügender Annäherung weit leichter durchführen läßt.

Da hierbei Näherungsannahmen einzuführen sind, über deren Berechtigung man sich ein Urteil bilden muß, tut man am besten, auf die ersten Grundlagen der Theorie zurückzugehen, weil sich dann besser übersehen läßt, wie weit man mit den vorzunehmenden Vernachlässigungen gehen darf. Ich beginne daher mit den Gleichungen (237), die das Gleichgewicht der Spannungen an einem Volumenelemente aussprechen

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \mathbf{D}\tau = 0$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} + \mathbf{D}\sigma_r - \frac{1}{r}\sigma_t = 0.$$

Jede dieser Gleichungen multipliziere ich mit $r\,dr$ und integriere sie von $r = r_i$ bis $r = r_a$; dadurch ergibt sich, wenn man beachtet, daß an beiden Grenzen τ und σ_r zu Null werden:

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_i^a r\sigma_x dr = 0 \tag{284}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_i^a r\tau dr - \int_i^a \sigma_t dr = 0. \tag{285}$$

Multipliziert man außerdem noch die erste der vorhergehenden Gleichungen mit $r^2 dr$ und integriert zwischen denselben Grenzen, so erhält man zunächst

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_i^a r^2\sigma_x dr + \int_i^a r\frac{\partial}{\partial r}(r\tau)dr = 0$$

oder bei partieller Integration des zweites Gliedes auf der linken Seite unter Beachtung des Umstandes, daß τ an beiden Grenzen verschwindet,

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_i^a r^2\sigma_x dr - \int_i^a r\tau dr = 0. \tag{286}$$

Aus der Verbindung der Gleichungen (285) und (286) endlich entsteht

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_i^a r^2\sigma_x dr = \int_i^a \sigma_t dr. \tag{287}$$

Diese Gleichungen sind noch streng richtig, auch für dickwandige Hohlzylinder. Der Vorteil, der durch die Einführung der von r_i bis r_a genommenen Integrale erzielt wird, kommt aber nur bei den dünnwandigen Rohren zur Geltung, indem man bei diesen für die Integration nach der Wanddicke hinlänglich genaue Näherungsannahmen für die Abhängigkeit

der Spannungen σ_x und σ_t von r einführen kann. Wenn dies geschehen und die Integration nach r ausgeführt ist, hat man es nur noch mit Funktionen von x zu tun, da die unabhängige Variable r durch die Integration ausgeschaltet ist.

Für diese weitere Verwertung der Gleichungen ist es am besten, sich an eine Deutung anzuschließen, die man ihnen zu geben vermag. Man denke sich nämlich, wie es in Abb. 31

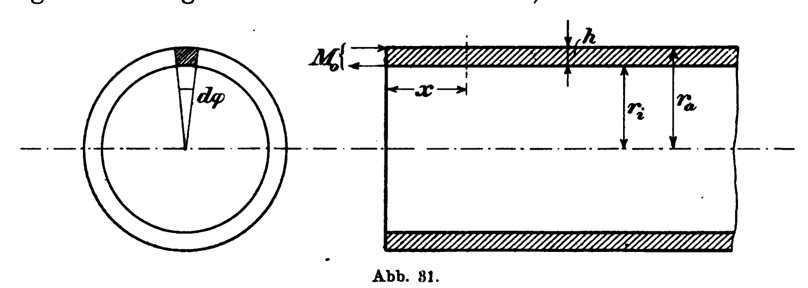


Abb. 31.

angedeutet ist, durch zwei Meridianebenen, die den unendlich kleinen Winkel $d\varphi$ miteinander bilden, einen Streifen aus der Rohrwand herausgeschnitten. Dieser kann als ein Stab von trapezförmigem Querschnitt betrachtet werden; oder schließlich genau genug auch als ein Stab von rechteckigem Querschnitt, wenn sich die Radien r_i und r_a nur wenig voneinander unterscheiden. An dem freien Ende des Stabes wirkt das sich aus den Spannungen σ_x, die an dieser Stelle gegeben sind, zusammensetzende Kräftepaar ein. Als weitere Lasten greifen an den Seitenflächen des Stabs die — zunächst unbekannten — Spannungen σ_t an. Jedem Flächenelemente dF der einen Seitenfläche, auf der sich die Spannung $\sigma_t dF$ überträgt, entspricht ein gleichgelegenes Flächenelement der anderen Seitenfläche, in der dieselbe Spannung übertragen wird. Beide Spannungen schließen einen Winkel ein, der sich um $d\varphi$ von einem gestreckten unterscheidet und sie können daher zu einer Resultierenden von der Größe $\sigma_t dF d\varphi$ zusammengesetzt werden, die bei einem positiven σ_t radial nach Innen zu geht. Für ein Längenelement dx des Stabes hat man daher im ganzen eine von den σ_t herrührende Belastung von der Größe

$$dx\,d\varphi\int_i^a \sigma_t\,dr$$

womit das auf der rechten Seite der Gleichung (287) stehende Integral seine Deutung gefunden hat.

Durch das Zusammenwirken des Kräftepaares am Stabende und der über die Länge des Stabs verteilten Lasten in radialer Richtung erfährt der Stab eine Biegung und die in dem Rohre auftretenden Spannungen σ_x sind zugleich als Biegungsspannungen in einem Stabquerschnitte zu betrachten. In einem Querschnittsstreifen von der Breite $r\,d\varphi$ und der Höhe dr wird die Spannung $\sigma_x r\,d\varphi\,dr$ übertragen. Die Bedingung, daß die Spannungen σ_x zusammen ein Kräftepaar liefern, wird durch die Gleichung

$$d\varphi\int_i^a \sigma_x r\,dr = 0$$

ausgesprochen, die mit Gleichung (284) in wesentlichen übereinstimmt. Das Moment des Kräftepaares kann dadurch berechnet werden, daß man für einen beliebigen Momentenpunkt, insbesondere also auch für den auf der Zylinderachse liegenden die Summe der statischen Momente aller einzelnen Kräfte nimmt. Das liefert

$$d\varphi\int_i^a r^2\sigma_x\,dx$$

und das Integral stimmt, wie man sieht, mit dem im ersten Gliede der Gl. (287) vorkommenden Integrale überein. Führt man zur Abkürzung für das Biegungsmoment bezogen auf einen beliebigen Querschnitt des Stabes die Bezeichnung M und für die auf die Längeneinheit bezogene Belastung in radialer Richtung die Bezeichnung p ein, so kann daher Gl (287) auch in der Form

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = p \tag{288}$$

geschrieben werden, die anschaulicher ist, weil sie unmittelbar an die Biegungstheorie des Stabes anzuknüpfen gestattet, und von dieser her auch schon bekannt ist.

Der Spannungszustand des Stabes hängt nun in erster Linie von der Biegung, d. h. von der Verschiebung ϱ in radialer Richtung ab. Dabei verstehen wir jetzt unter ϱ die Verschiebung der auf der Stabachse, also im Abstande $r_m = \frac{r_a + r_i}{2}$ von der Rohrachse gelegenen Punkte. Wegen der geringen Wanddicke darf vorausgesetzt werden, daß dieser Wert zugleich der Mittelwert der Verschiebungen ϱ zwischen den Stellen $r = r_i$ und $r = r_a$ ist. Im Mittel ist dann die Dehnung ε_t in tangentialer Richtung gleich $\frac{\varrho}{r_m}$ zu setzen. Ferner kann, da die Summe der Zugspannungen σ_x für den Stabquerschnitt gleich der Summe der Druckspannungen ist, bei der Berechnung von p von ihrem Einflusse auf die tangentiale Dehnung abgesehen werden. Auch auf die Spannungen in radialer Richtung braucht hierbei nicht geachtet zu werden. Da es ohnehin nur auf eine Annäherung ankommt, dürfen wir es daher als genügend betrachten, bei der Berechnung von p im Mittel

$$\sigma_t = E \frac{\varrho}{r_m} \tag{289}$$

zu setzen, wenn E der Elastizitätsmodul ist.

Man erhält dann, vom Vorzeichen abgesehen,

$$p = d\varphi \int_i^a \sigma_t dr = d\varphi\, E \frac{\varrho}{r_m} \int_i^a dr = d\varphi\, E\, \varrho \frac{h}{r_m}$$

und Gleichung (288) geht über in

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -\, d\varphi\, E \frac{h}{r_m} \cdot \varrho.$$

Das negative Vorzeichen auf der rechten Seite war nämlich beizufügen, weil bei einem positiven ϱ die Last p nach innen hin, also in negativer Richtung geht. Diese Gleichung entspricht genau der für einen Stab auf nachgiebiger Unterlage geltenden, die in § 45 des dritten Bandes behandelt wurde Das weitere Verfahren kann sich daher eng an das dort ein-

geschlagene anschließen. Insbesondere dürfen wir die Gleichung der elastischen Linie des Stabes in der Form

$$E\Theta \frac{d^2 \varrho}{dx^2} = M$$

heranziehen, wobei wegen des Vorzeichens von M zu bemerken ist, daß dieses hier positiv zu nehmen ist, weil die Ausbiegungen ϱ als positiv gelten, wenn sie in Abb. 31 nach oben hin erfolgen, während bei der Untersuchung der elastischen Linie des Stabes im dritten Bande die Ausbiegungen in der entgegengesetzten Richtung positiv gerechnet wurden. Setzt man diesen Wert von M in die vorhergehende Gleichung ein, so erhält man

$$E\Theta \frac{d^4 \varrho}{dx^4} = -d\varphi\, E \frac{h}{r_m} \varrho.$$

Für Θ kann man, da es als ausreichend angesehen werden sollte, den Stabquerschnitt als rechteckig zu betrachten,

$$\Theta = \frac{r_m\, d\varphi\, h^3}{12}$$

setzen, womit die vorige Gleichung übergeht in

$$\frac{d^4 \varrho}{dx^4} = -\frac{12}{h^2 r_m^2} \varrho. \tag{290}$$

Die allgemeine Lösung läßt sich ebenso wie in Gl. (140) des dritten Bandes in der Form

$$\begin{aligned} \varrho = C_1 e^{-\alpha x} \sin \alpha x + C_2 e^{-\alpha x} \cos \alpha x + C_3 e^{\alpha x} \sin \alpha x \\ + C_4 e^{\alpha x} \cos \alpha x \end{aligned} \tag{291}$$

angeben. Die darin auftretende Konstante α, die mit dem in den vorigen Paragraphen auftretenden Ausdehnungskoeffizienten α nicht verwechselt werden darf, ist, wie aus der Einsetzung in die Differentialgleichung (290) hervorgeht,

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{3}{r_m^2 h^2}} \tag{292}$$

zu setzen. Von den Integrationskonstanten sind hier C_3 und C_4 gleich Null zu setzen, weil ϱ für $x = \infty$ zu Null werden muß. Die beiden übrigen ergeben sich aus den Be-

dingungen am Zylinderende, also für $x = 0$. Zunächst ist dort die Schubkraft V für den Stab und daher $\frac{d^3\varphi}{dx^3}$ gleich Null. Das liefert die Gleichung

$$C_1 + C_2 = 0.$$

Ferner ist das Moment im Anfangsquerschnitt gegeben. Bezeichnet man es einstweilen mit M_0, so wird

$$M_0 = E\Theta \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)_0$$

oder beim Einsetzen des Wertes von φ

$$M_0 = -2\alpha^2 C_1 E\Theta.$$

Durch Einsetzen der Werte von α und Θ findet man daher für die Integrationskonstanten

$$C_1 = -\frac{M_0 2\sqrt{3}}{Eh^2 d\varphi}; \quad C_2 = +\frac{M_0 2\sqrt{3}}{Eh^2 d\varphi}$$

und die fertige Lösung für φ lautet

$$\varphi = \frac{M_0 2\sqrt{3}}{Eh^2 d\varphi} e^{-\alpha x}(\cos\alpha x - \sin\alpha x), \tag{293}$$

wobei noch für α der in Gl. (292) angegebene Wert zu nehmen ist. Es bleibt noch der Wert des Anfangsmomentes M_0 anzugeben. Dieses rührt von den am freien Zylinderende anzubringenden Spannungen σ_x her, deren Betrag sich aus den Formeln des vorigen Paragraphen ergibt. Nach den Gleichungen (283) ist mit der hier wegen der bereits vorgenommenen Vernachlässigungen gebotenen Unterdrückung von $\frac{h}{3r_m}$ gegenüber der Einheit

$$\sigma_x = -G\frac{m+1}{m-1}\alpha(t_i - t_a) \quad \text{für } r = r_i$$

$$\sigma_x = +G\frac{m+1}{m-1}\alpha(t_i - t_a) \quad \text{für } r = r_a.$$

Nun waren das jene Kräfte, die wir an den Zylinderenden anbringen mußten, um den im vorigen Paragraphen betrachteten Spannungszustand überall zu verwirklichen. Um von diesem Falle auf den Fall der freien Zylinderenden zu kommen, müssen

wir uns zu jenen Kräften andere hinzugefügt denken, die ihnen entgegengesetzt und gleich groß sind. Der Spannungszustand bei freien Zylinderenden wird daher aus den früher berechneten Wärmespannungen erhalten, indem wir die Spannungen dazu fügen, die von den mit dem entgegengesetzten Vorzeichen genommenen Lasten σ_x an den Zylinderenden für sich genommen hervorgebracht werden. Das sind also an der Kante $r = r_i$ Zugkräfte und an der Kante $r = r_a$ Druckkräfte von dem vorher angegebenen Betrage. Mit diesen Pfeilen waren die Zusatzlasten am Zylinderende auch schon in Abb. 31 eingetragen und das von ihnen herrühende Kräftepaar für den Anfangsquerschnitt des Stabes dreht im Sinne des Uhrzeigers und ist daher nach unseren Vorzeichenfestsetzungen positiv zu rechnen. Zwischen M_0 und dem Absolutbetrage der Kantenspannungen σ_x besteht, da der Querschnitt des Stabes näherungsweise als rechteckig betrachtet wurde, der aus der Biegungstheorie des Stabes bekannte einfache Zusammenhang

$$\sigma_x = \frac{6\,M_0}{r_m\,d\varphi\,h^2}.$$

Ermittelt man hieraus M_0, nachdem der vorher angegebene Wert von σ_x eingesetzt ist, führt dann M_0 in Gl. (293) ein und vereinfacht den Ausdruck mit Hülfe der bekannten Beziehung zwischen G und E, so erhält man

$$\varrho = \frac{m}{m-1}\frac{\sqrt{3}}{6}\,r_m\alpha_1(t_i - t_a)e^{-\alpha x}(\cos\alpha x - \sin\alpha x)$$

oder wenn man die Poissonsche Konstante $m = 4$ setzt,

$$\varrho = 0{,}38\,r_m\alpha_1(t_i - t_a)e^{-\alpha x}(\cos\alpha x - \sin\alpha x). \qquad (294)$$

Dabei ist zur Unterscheidung der beiden α der Ausdehnungskoeffizient jetzt mit α_1 bezeichnet, während α die aus Gl. (292) bekannte Konstante ist. Insbesondere ergibt sich die Ausweitung, die das freie Zylinderende infolge der ungleichförmigen Erwärmung erfährt, zu

$$\varrho_0 = 0{,}38\,r_m\alpha_1(t_i - t_a). \qquad (295)$$

Beachtenswert ist ferner, das sich das Rohr in der Nähe des Endes nicht einfach erweitert, sondern daß es eine wellenförmige Formänderung erfährt, so zwar daß die Amplitude der Wellen mit der Entfernung vom Zylinderende schnell abnimmt. Von $x = 0$ bis $x = 0{,}6\sqrt{r_m h}$ ist ϱ positiv. Bei der zuletzt genannten Abszisse wird ϱ zu Null und bleibt dann negativ bis zu $x = 3{,}0\sqrt{r_m h}$, wo es wieder zu Null wird. Weiterhin ist dann wegen des Exponentialfaktors $e^{-\alpha x}$ die Ausbiegung und hiermit der Einfluß des freien Endes auf den Spannungszustand nur noch unerheblich.

Auch die Spannungen lassen sich nach den aufgestellten Formeln für jede Stelle leicht angeben. Von Wichtigkeit sind dabei namentlich die Spannungserhöhungen, die in der Nähe der Rohrenden gegenüber den größten Spannungen an den weiter abliegenden Stellen auftreten. Denn in der Tat ist die Gefahr eines Bruches nicht in den mittleren Teilen des Rohres, sondern in der Nähe der Rohrenden am größten.

Die Ringspannungen σ_t erfahren die größte Erhöhung am Rohrende. Die Ausbiegung für sich genommen bringt nämlich an dieser Stelle Zugspannungen σ_t hervor, die man nach den Gleichungen (289) und (295) genau genug gleich

$$0{,}38\, E\alpha_1 (t_i - t_a)$$

setzen kann. Dazu kommen die im vorigen Paragraphen ermittelten und aus den Gl. (283) mit Vernachlässigung des Gliedes $\frac{h}{6 r_m}$ zu entnehmenden Spannungen σ_t. Bei $r = r_i$ waren das Druckspannungen, die durch das Zusatzglied eine Verminderung erfahren. An der äußeren Kante dagegen addieren sich die im gleichen Sinne gehenden Spannungen, so daß dort die Bruchgefahr, soweit sie von den Ringspannungen herrührt, am größten ist. Im ganzen wird

$$\sigma_t^{\max} = G\frac{m+1}{m-1}\alpha_1 (t_i - t_a) + 0{,}38\, E\alpha_1 (t_i - t_a)$$

oder, wenn man von G auf E mit $m = 4$ umrechnet,

$$\sigma_t^{\max} = 1{,}05\, E\alpha_1 (t_i - t_a). \qquad (296)$$

Die Spannungserhöhung macht daher ungefähr 57 % von der in den mittleren Teilen des Rohrs bestehenden Spannung aus; sie ist demnach recht beträchtlich.

Die Spannungen σ_x werden am Rohrende im ganzen zu Null. Jener Anteil, der von der Ausbiegung allein herrührt, wird am größten dort, wo der Krümmungshalbmesser den kleinsten, d. h. $\frac{d^2\varrho}{dx^2}$ den größten Wert annimmt. Hierbei ist zu beachten, daß die früher (in den Gleichungen (283)) festgestellten Wärmespannungen für $r = r_i$ Druck- und für $r = r_a$ Zugspannungen waren. Eine Spannungserhöhung durch die Ausbiegung kann daher nur dort eintreten, wo die elastische Linie des Stabes nach Innen zu hohl ist, d. h. die größten Spannungen σ_x treten dort auf, wo $\frac{d^2\varrho}{dx^2}$ seinen größten negativen Wert annimmt. Nun ist nach Gl. (294)

$$\frac{d^2\varrho}{dx^2} = 0{,}38\, r_m \alpha_1 (t_i - t_a) \cdot 2\alpha^2 e^{-\alpha x} (\sin \alpha x + \cos \alpha x)$$

und dieser Ausdruck nimmt sein erstes Minimum an für $\alpha x = \pi$, womit

$$\left(\frac{d^2\varrho}{dx^2}\right)_{\min} = -\,0{,}38\, r_m \alpha_1 (t_i - t_a) \cdot 2\alpha^2 e^{-\pi}$$

gefunden wird. Damit berechnet sich der zugehörige Wert des Biegungsmoments M, nach Einsetzen von α und von Θ zu

$$M = -\,0{,}0047\, E r_m d\varphi h^2 \alpha_1 (t_i - t_a)$$

und die ihm entsprechende Biegungsbeanspruchung an der Kante zu

$$\sigma = 0{,}028\, E \alpha_1 (t_i - t_a).$$

Das ist die Spannungserhöhung, die zu der früher festgestellten Wärmespannung

$$\sigma_x = G \frac{m+1}{m-1} \alpha_1 (t_i - t_a) = 0{,}67\, E \alpha_1 (t_i - t_a)$$

hinzutritt. Man sieht, daß die Erhöhung durch die Ausbiegung des Rohrendes nur unerheblich ist; die größte überhaupt vorkommende Spannung wird daher

durch den in Gl. (296) angegebenen Wert von σ_t^{max} dargestellt.

So weit als es für praktische Zwecke nötig ist, kann hiermit die Frage als gelöst angesehen werden. Man darf freilich nicht vergessen, daß es sich nur um eine angenäherte Lösung handelt. Der Vergleich des durch die beiden Meridianebenen aus der Rohrwand herausgeschnittenen Sektors mit einem einzelnen Stabe ist namentlich insofern nicht ganz einwandfrei, als sich der Stab den Spannungen σ_x entsprechend der Quere nach frei auszudehnen oder zusammenzuziehen vermag, während der Sektor daran durch den Zusammenhang mit den übrigen Teilen der Rohrwand gehindert ist. Dadurch wird ein merklicher Unterschied herbeigeführt, der aber doch nicht so hoch einzuschätzen ist, daß dadurch die praktische Brauchbarkeit der Näherungslösung verhindert werden könnte.

Eine bessere Annäherung würde sich wahrscheinlich durch eine engere Anlehnung an die im Eingange dieses Paragraphen angedeutete strenge Theorie erzielen lassen. Man könnte nämlich die in der strengen Lösung vorkommenden Funktion $F_1 F_2$ usf. nach Potenzen des Abstandes $r - r_m$ von der Mitte entwickeln und sich damit begnügen, nur die ersten Glieder davon beizubehalten. Dadurch würde man wohl ohne allzugroße Rechnungen zu einem etwas genaueren Ergebnisse geführt werden, als es vorher angegeben war. Einstweilen genügt dieses aber meiner Ansicht nach auch schon ganz gut.

Fünfter Abschnitt.

Die allgemeinen Sätze über die Formänderungsarbeit; Eigenspannungen.

§ 42. Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten für elastische Körper.

In Band I (§ 21 der dritten Auflage) wurde die Aussage des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten für starre Körper auf Grund des Wechselwirkungsgesetzes abgeleitet. An diese Betrachtung werde ich hier anknüpfen; sie ist nur entsprechend zu erweitern, so daß sie auf elastische Körper übertragen werden kann.

Für einen einzelnen materiellen Punkt, der irgend einem Körper angehört und an dem neben einer äußeren Kraft $\mathfrak{P}$ noch innere Kräfte $\mathfrak{J}$ in beliebiger Zahl angreifen, hat man zunächst die Gleichgewichtsbedingung

$$\mathfrak{P} + \Sigma\mathfrak{J} = 0$$

und daher auch, wenn man unter $\mathfrak{s}$ eine beliebige unendlich kleine Strecke versteht, die sich als eine virtuelle Verschiebung des materiellen Punktes bezeichnen läßt, die mit der vorigen gleichwertige Gleichgewichtsbedingung

$$\mathfrak{P}\mathfrak{s} + \Sigma\mathfrak{J}\mathfrak{s} = 0 .$$

Diese Bedingung besteht, von welcher Art der Körper, dem der materielle Punkt angehört, nun auch sein mag, also für einen elastisch festen oder flüssigen Körper ebenso wie

für einen starren. Dasselbe gilt auch noch für die weitere Gleichung

$$\Sigma \mathfrak{P}\mathfrak{s} + \Sigma\Sigma \mathfrak{J}\mathfrak{s} = 0\,, \tag{297}$$

die aus der vorigen durch Summierung über alle materiellen Punkte erhalten wird, aus denen sich der betrachtete Körper zusammensetzt.

Die unendlich kleinen Verschiebungswege $\mathfrak{s}$ sind im allgemeinen für jeden materiellen Punkt andere und ganz willkürlich wählbare Größen. Wir können sie aber auch, wenn dies für unsere Zwecke nützlich erscheint, irgendwelchen Beschränkungen unterwerfen. Insbesondere können wir uns, wenn der Körper, um den es sich handelt, als ein starrer betrachtet werden darf, auf die Betrachtung solcher Verschiebungswege $\mathfrak{s}$ der einzelnen Punkte beschränken, die möglich sind, ohne daß eine Formänderung des Körpers eintritt. In diesem Falle wird, wie im ersten Bande auseinandergesetzt wurde, nach der allgemeinsten Aussage des Wechselwirkungsgesetzes

$$\Sigma\Sigma \mathfrak{J}\mathfrak{s} = 0\,, \tag{298}$$

so daß als notwendige und zugleich hinreichende Gleichgewichtsbedingung für die äußeren Kräfte am starren Körper

$$\Sigma \mathfrak{P}\mathfrak{s} = 0 \tag{299}$$

übrig bleibt. Man muß nur hinzufügen, daß diese Gleichung für jedes mögliche System von Verschiebungen $\mathfrak{s}$ der Angriffspunkte der einzelnen Kräfte $\mathfrak{P}$ gültig ist, die ohne Formänderung des Körpers möglich sind oder, wie man sich der Kürze halber ausdrückt, für jede virtuelle Verschiebung des starren Körpers.

Bis dahin habe ich nur von früher her Bekanntes wiederholt. Nun denke man sich die Kräfte $\mathfrak{P}$ an einem elastischfesten Körper angebracht. Die Formänderungen, die beim Aufbringen dieser Lasten eintreten, seien bereits abgelaufen, so daß der Körper und jedes Teilchen, das zu ihm gehört, im Gleichgewicht und zwar in Ruhe ist. Auch hier können wir uns jedem Punkte des Körpers eine Strecke $\mathfrak{s}$ beigelegt denken,

die als eine virtuelle Verschiebung angesehen werden kann. Zunächst können wir dabei auch wieder an solche Strecken $\mathfrak{s}$ denken, wie sie der virtuellen Verschiebung eines starren Körpers entsprechen und dann bleibt Gl. (299) unverändert gültig. Damit ist nur gesagt, daß die äußeren Kräfte denselben Gleichgewichtsbedingungen am elastisch-festen Körper entsprechen müssen, als wenn sie in der gleichen Weise an einem starren Körper angebracht wären.

Dabei wollen wir aber jetzt nicht stehen bleiben. Wir können auch andere virtuelle Verschiebungen in Betracht ziehen, mit denen eine Formänderung des Körpers verbunden ist. Diese Verschiebungen dürfen im übrigen ganz nach Belieben gewählt werden; sie sollen nur unendlich klein und außerdem stetige Funktionen der Koordinaten xyz des Ortes sein, auf den sie sich beziehen. Die zuletzt genannte Bedingung ist nötig, damit die Verschiebung überhaupt geometrisch möglich ist, ohne daß der Zusammenhang des Körpers zerstört wird.

Bei Verschiebungen, die mit Formänderungen verbunden sind, verlieren die Gleichungen (298) und (299), wie schon aus den Untersuchungen des ersten Bandes bekannt ist, ihre Gültigkeit. An ihrer Stelle muß man auf die ganz allgemein gültige Gleichung (297) zurückgreifen. Um weitere Schlüsse aus dieser Gleichung ziehen zu können, muß man danach trachten, die darin vorkommende Summe der virtuellen Arbeiten der inneren Kräfte näher zu bestimmen, so nämlich daß sie auf Größen, die wir als bekannt ansehen dürfen, zurückgeführt werden kann.

Das kann geschehen mit Hülfe des Begriffes der Formänderungsarbeit, der schon im dritten Bande aufgestellt und vielfach benutzt wurde. Als Formänderungsarbeit wurde die Arbeit der äußeren Kräfte bezeichnet, die während der unter dem Einflusse dieser Kräfte erfolgenden Formänderung verrichtet wird. Sie gibt den Betrag der dem Körper zugeführten Energie an, die unter der Voraussetzung einer vollkommen elastischen Formänderung in Gestalt von potentieller Energie

darin aufgespeichert und beim Zurückgehen in den spannungslosen Zustand wieder als Arbeitsleistung daraus zurückgewonnen werden kann. Die von den inneren Kräften während der Formänderung geleistete Arbeit ist ebensogroß wie die Arbeit der äußeren Kräfte, aber von entgegengesetztem Vorzeichen. Die inneren Kräfte, die sich der Formänderung widersetzen, werden nämlich bei der Formänderung überwunden, leisten daher negative Arbeiten und werden dadurch in den Stand gesetzt, beim Rückgängigmachen der Formänderung positive Arbeit zu leisten und hiermit den dieser entsprechenden Energiebetrag wieder nach außen abzugeben.

Der Unterschied zwischen dem Gebrauche, den wir früher von dem in dieser Weise festgestellten Begriffe der Formänderungsarbeit machten und dem hier beabsichtigten besteht ausschließlich darin, daß es sich früher nur um die durch die gegebenen Lasten tatsächlich hervorgebrachten Formänderungen handelte, während jetzt die Arbeit der inneren Kräfte für bloß willkürlich erdachte und nicht wirklich ausgeführte Formänderungen festgestellt werden soll. Dieser Unterschied hindert jedoch nicht, daß wir in ganz ähnlicher Weise zum Ziele kommen wie früher.

Vor allem soll der Ausdruck für die Formänderungsarbeit, die in einem durch gegebene Lasten in Spannung versetzten Körper aufgespeichert ist, nochmals in derselben Weise abgeleitet werden wie im dritten Bande (§ 15 der dritten Auflage), wobei aber jetzt der größeren Allgemeinheit wegen ein Volumenelement $dx\,dy\,dz$ betrachtet werden soll, dessen Achsenrichtungen nicht mit den Hauptrichtungen des Spannungszustandes an dieser Stelle zusammenzufallen brauchen. Die auf die Längeneinheit bezogenen Dehnungen in den drei Kantenrichtungen seien wie früher mit ε_x, ε_y, ε_z und die Änderungen der ursprünglich rechten Winkel zwischen den Kanten mit γ_{xy}, γ_{xz} und γ_{yz} bezeichnet.

Wir betrachten zunächst das Volumenelement für sich, wozu wir nach dem allgemeinen Grundsatze der Festigkeits-

lehre, daß jeder Teil eines Körpers wieder ein Körper ist, auf den sich die allgemeinen Sätze der Mechanik anwenden lassen, berechtigt sind. Für dieses Volumenelement sind die an den Seitenflächen angreifenden Spannungen als äußere Kräfte zu betrachten. Zu ihnen kommt als weitere äußere Kraft die unmittelbar an dem Volumenelemente angreifende Massenkraft mit den auf die Volumeneinheit bezogenen Komponenten XYZ. In jedem Augenblicke während der Formänderung, die wir uns so langsam vollzogen denken können, daß die Beschleunigungen vernachlässigt werden dürfen, halten sich die bezeichneten äußeren Kräfte im Gleichgewichte miteinander. Daher ist die Summe ihrer Arbeiten gleich Null für jede Verschiebung, die ohne Formänderung erfolgt. Wir können daher bei der Berechnung der Arbeiten der äußeren Kräfte von der Bewegung, die das Volumenelement als Ganzes erfährt, absehen und brauchen uns nur um die relativen Bewegungen innerhalb des Volumenelementes zu kümmern, die in den Größen ε_x usf. zum Ausdrucke kommen. Der Mittelpunkt des Volumenelementes bleibt hierbei in Ruhe, so daß die Massenkraft XYZ keine Arbeit leistet, während sich die algebraische Summe der Arbeiten der an den Seitenflächen angreifenden Spannungen zu

$$\tfrac{1}{2}\,dx\,dy\,dz(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \gamma_{xy}\tau_{xy} + \gamma_{xz}\tau_{xz} + \gamma_{yz}\tau_{yz})$$

berechnet. Der Faktor $\frac{1}{2}$ ist dabei aus dem schon in § 15 des dritten Bandes ausführlich erörterten Grunde beizufügen, um nämlich dem allmählichen Anwachsen der Spannungen während der Formänderung Rechnung zu tragen.

Der vorstehende Ausdruck gibt die dem Volumenelemente bei der Formänderung durch die Vermittelung der an ihm angreifenden Spannungen zugeführte Energie an. Ein Ausdruck von dieser Form gilt für jedes Volumenelement und wenn wir für $dx\,dy\,dz$ kürzer dv schreiben, erhalten wir die ganze in dem Körper aufgespeicherte Formänderungsarbeit A in Gestalt des über das ganze Volumen erstreckten Raumintegrals

$$A = \tfrac{1}{2}\int(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \gamma_{xy}\tau_{xy} + \gamma_{xz}\tau_{xz} + \gamma_{yz}\tau_{yz})\,dv. \quad (300)$$

Man kann diesen Ausdruck noch dadurch auf zwei verschiedene Arten ungestalten, daß man mit Hülfe des Elastizitätsgesetzes entweder die Formänderungen in den Spannungen oder umgekehrt die Spannungen in den durch sie hervorgebrachten Formänderungen ausdrückt. Wir wollen hier den zuletzt bezeichneten Weg einschlagen, und zwar deshalb, weil die geometrischen Größen, die die Formänderung beschreiben, mit den virtuellen Verschiebungen, die wir nachher betrachten wollen, am einfachsten in Zusammenhang gebracht werden können.

Beachtet man, daß nach dem Elastizitätsgesetze

$$\sigma_x = 2G\left(\varepsilon_x + \frac{e}{m-2}\right); \qquad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

usf. gesetzt werden kann, so erhält man an Stelle von Gl. (300) nach einfacher Umformung, unter Beachtung, daß die kubische Ausdehnung $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ ist,

$$A = G\int\left\{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{1}{m-2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 + \right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{2}\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2\right)\right\} dv. \qquad (301)$$

Wenn man will, kann man hierin die ε und γ auch in den Differentialquotienten der Verschiebungen $\xi\ \eta\ \zeta$ in bekannter Weise ausdrücken. Zunächst genügt es aber, den Ausdruck in dieser Form stehen zu lassen.

Nach diesen Vorbereitungen können wir dazu übergehen, die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte $\Sigma\Sigma\mathfrak{J}\mathfrak{s}$ und zwar zunächst wieder innerhalb eines Volumenelementes $dx\,dy\,dz$ zu berechnen, die zu irgend einer willkürlich erdachten, jedoch der vorher erwähnten Stetigkeitsbedingung entsprechenden Verschiebung gehört. Äußere Kräfte sind dabei für das Volumenelement wieder die Spannungen an den Seitenflächen und die Massenkraft. Alle diese und auch die inneren Kräfte ändern sich während der virtuellen Verschiebung nicht, da es sich nicht um eine wirklich stattfindende Formänderung handelt, sondern nur um eine Berechnung der Arbeiten der bereits

fest gegebenen Kräfte bei den willkürlich angenommenen Verschiebungswegen. Auch hier können wir wieder den ganzen Verschiebungsvorgang in zwei Teile trennen, von denen der erste darin besteht, daß das Volumenelement als Ganzes ohne Formänderung verschoben oder auch gedreht wird, während der zweite Teil aus den relativen Verschiebungen innerhalb des Volumenelementes besteht, die zu seiner Formänderung führen. Während des ersten Teiles ist die Summe der Arbeitsleistungen sowohl der äußeren Kräfte als auch der inneren Kräfte je für sich gleich Null. Die Formänderung während des darauf folgenden zweiten Teiles des ganzen Verschiebungsvorganges kann durch die damit verbundenen Dehnungen $\delta \varepsilon_x$, $\delta \varepsilon_y$, $\delta \varepsilon_z$ und Winkeländerungen $\delta \gamma_{xy}$, $\delta \gamma_{xz}$, $\delta \gamma_{yz}$ hinreichend beschrieben werden. Diese Größen sind, wie wohl zu beachten ist, als ganz willkürliche, jedoch stetige Funktionen der Koordinaten xyz zu betrachten. Durch die Bezeichnung, die wir ihnen gegeben haben, soll nur darauf aufmerksam gemacht werden, daß wir sie späterhin auch als willkürlich erdachte Abänderungen der tatsächlich bestehenden Formänderungsgrößen ε_x usf. ansehen können.

Die Arbeit der äußeren Kräfte für das Volumenelement bei der virtuellen Verschiebung berechnet sich nun, ähnlich wie vorher, zu

$$dx\,dy\,dz\,(\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}).$$

Daß der Faktor $\frac{1}{2}$ hier fehlt, hat darin seinen Grund, daß die Spannungen nicht erst während der Formänderung allmählich anwachsen, sondern von vornherein bestehen und während der virtuellen Verschiebung konstant bleiben. Nach Gl. (297) ist die Arbeit der inneren Kräfte während der virtuellen Verschiebung ebensogroß wie der vorstehende Ausdruck, aber von entgegengesetzten Vorzeichen. Geht man von der Vorstellung eines molekularen Aufbaues des Körpers aus, so muß man sich das Volumenelement groß genug denken, so daß es noch eine große Zahl von Molekülen umfaßt. Das hindert nicht, es nachher trotzdem als unendlich klein gegenüber den Ab-

messungen des ganzen Körpers anzusehen. Unter $\Sigma\Sigma\mathfrak{J}\mathfrak{s}$ ist dann die Summe der Arbeitsleistungen der zwischen den einzelnen Molekülen des Volumenelementes bestehenden inneren Kräfte $\mathfrak{J}$ zu verstehen.

Auch hier können wir, da die Verschiebungsgrößen $\delta\varepsilon_x$ usf. als stetig vorausgesetzt wurden, die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte für den ganzen Körper durch eine Integration über das ganze Volumen zu

$$\Sigma\Sigma\mathfrak{J}\mathfrak{s} = -\int(\sigma_x\delta\varepsilon_x + \sigma_y\delta\varepsilon_y + \sigma_z\delta\varepsilon_z + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy} + \\ + \tau_{xz}\delta\gamma_{xz} + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz})\,dv \qquad (302)$$

erhalten. Dieser Übergang vom Volumenelement zum ganzen Körper ist deshalb in der angegebenen Weise möglich, weil die Summe der Arbeitsleistungen der Spannungen auf einer Seitenfläche, in der zwei Volumenelemente aneinandergrenzen, für beide Volumenelemente zusammen genommen zu Null wird, während diese Summe bei einer sprungweisen Änderung der Verschiebungswege, der freilich mit einer Zerreißung des Zusammenhanges verbunden wäre, einen von Null verschiedenen Betrag liefern würde.

Der in Gl. (302) festgestellte Wert läßt sich nun in einen einfachen Zusammenhang mit dem in Gl. (301) angegebenen Betrage der Formänderungsarbeit bringen. Um dies nachzuweisen, berechnen wir, um wie viel sich die nach Vorschrift der Gl. (301) festgestellte Formänderungsarbeit ändern würde, wenn der durch die Größen ε_x usf. beschriebene Formänderungszustand tatsächlich in den durch die Größen $\varepsilon_x + \delta\varepsilon_x$ usf. angegebenen übergehen würde. Der Anteil, den das Volumenelement $dx\,dy\,dz$ zu A liefert und den wir mit dA bezeichnen wollen, ändert sich dann um einen Betrag δdA, der nach den Regeln der Variationsrechnung, die in diesem Falle mit denen der Differentialrechnung zusammenfallen, gefunden wird zu

$$\delta dA = dx\,dy\,dz\,G\left\{2\varepsilon_x\delta\varepsilon_x + 2\varepsilon_y\delta y + 2\varepsilon_z\delta\varepsilon_z + \right. \\ + \frac{2}{m-2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)(\delta\varepsilon_x + \delta\varepsilon_y + \delta\varepsilon_z) + \gamma_{xy}\delta\gamma_{xy} + \\ \left. + \gamma_{xz}\delta\gamma_{xz} + \gamma_{yz}\delta\gamma_{yz}\right\}.$$

Die in der Klammer vorkommenden Glieder mit dem Faktor $\delta \varepsilon_x$ lassen sich unter Benutzung der Bezeichnung e für die kubische Ausdehnung zusammenfassen zu

$$\delta \varepsilon_x \cdot 2\left(\varepsilon_x + \frac{e}{m-2}\right).$$

Nimmt man hierzu noch den vor der Klammer stehenden Faktor G, so geht dies über in

$$\delta \varepsilon_x \cdot \sigma_x$$

und ähnlich lassen sich auch die übrigen Glieder deuten. Im ganzen erhält man daher

$$\delta dA = dx\,dy\,dz\,(\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \\ + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}).$$

Das ist aber genau der Betrag, den wir vorher für den negativen Wert der virtuellen Arbeiten der inneren Kräfte im Volumenelemente bei der mit den willkürlichen Formänderungen $\delta \varepsilon_x$ usf. verbundenen Verschiebung festgestellt haben. Durch Summation über sämtliche Volumenelemente finden wir daher für den ganzen Körper

$$\Sigma \Sigma \mathfrak{J} \mathfrak{s} = - \delta A. \tag{303}$$

Hiernach läßt sich Gl. (279), die das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten in seiner allgemeinsten Form ausspricht, für den elastisch festen Körper auf die Form

$$\Sigma \mathfrak{P} \mathfrak{s} - \delta A = 0 \tag{304}$$

bringen, in der A den in Gl. (301) angegebenen Wert bedeutet. Voraussetzung ist, wegen der besonderen Form von A, daß der Körper dem Hookeschen Gesetze gehorcht. Es mag hierbei bemerkt werden, daß Gl. (304) auch noch für den Fall eines von dem Hookeschen abweichenden Elastizitätsgesetzes aufrecht erhalten werden kann, unter der Voraussetzung, daß dann A in entsprechend anderer Weise in den Formänderungsgrößen ausgedrückt wird. Die besondere Form, die man A in einem solchen Falle zu geben hat, definiert zu-

gleich das betreffende Elastizitätsgesetz. Auf Betrachtungen dieser Art soll aber hier nicht weiter eingegangen werden.

Für den Fall des Hookeschen Elastizitätsgesetzes lautet demnach das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten ausführlicher angeschrieben:

$$\Sigma \mathfrak{P} \delta \mathfrak{s} - G \delta \int \Big\{ \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{e^2}{m-2} + \\ + \tfrac{1}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2) \, dv = 0 \,. \qquad (305)$$

Hierbei ist abweichend von der bisherigen Bezeichnungsweise, die sich an die in Band I gebrauchte anschloß, die virtuelle Verschiebung des Angriffspunktes einer äußeren Kraft $\mathfrak{P}$ mit $\delta \mathfrak{s}$ anstatt wie bisher mit $\mathfrak{s}$ bezeichnet. Dieser Wechsel in der Bezeichnungsweise erscheint hier wünschenswert, um eine Symmetrie mit den Bezeichnungen des zweiten Gliedes auf der linken Seite von Gl. (305) herzustellen.

Gl. (305) ist zuerst von Kirchhoff aufgestellt worden. Ich hatte sie bereits in der zweiten Auflage des dritten Bandes in § 63a hergeleitet. In der dritten Auflage ließ ich aber diesen Gegenstand fallen, um ihn an diese Stelle zu verweisen. Gegenüber jener früheren Darstellung habe ich mich bemüht, den Beweisgang hier deutlicher und einwandfreier zu gestalten, wenn dabei auch eine etwas größere Länge mit in den Kauf genommen werden muß. Meine frühere Darstellung hatte nämlich, wie ich aus einigen Äußerungen entnehmen konnte, zu erheblichen Mißverständnissen Anlaß gegeben.

Besonders zu beachten ist übrigens, daß die virtuellen Verschiebungen, auf die sich Gl. (305) bezieht, abgesehen von der Bedingung der Stetigkeit, ganz willkürlich sind und daß sie sich daher auch nur auf einen beliebig abgegrenzten Teil des Körpers zu erstrecken brauchen, während der Rest des Körpers in Ruhe bleibt. Längs der Grenzflächen, an denen beide Teile aneinander stoßen, muß dann freilich der Stetigkeitsbedingung entsprechend, oder mit anderen Worten um die virtuelle Verschiebung ohne eine Zerreißung des Körperzusammenhanges ausführen zu können, die Verschiebung überall

schon gleich Null sein. Mit diesem Vorbehalt kann daher Gl. (305) auch auf jeden beliebig abgegrenzten Teil des Körpers angewendet werden.

Bei der Anwendung der Gl. (305) wird man es häufig so einrichten können, daß bei der in Betracht gezogenen virtuellen Formänderung die äußeren Kräfte gar keine Arbeit leisten. Das trifft insbesondere dann zu, wenn man nur einen Teil des Körpers der virtuellen Verschiebung unterwirft, falls an diesem Teile keine der äußeren Kräfte angreift. Unter dieser besonderen Voraussetzung (und keineswegs allgemein!) vereinfacht sich dann die Aussage des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten zu der Gleichung

$$\delta A = 0. \qquad (306)$$

Diese Gleichung ist die notwendige Bedingung dafür, daß die Formänderungsarbeit, die dem sich tatsächlich einstellenden Zustande entspricht, entweder ein Maximum oder ein Minimum ist. Daß hier nur ein Minimum vorliegen kann, braucht nicht ausführlich durch Bildung der zweiten Variation erwiesen zu werden, da es hierauf bei der Anwendung der Gleichung (306) überhaupt nicht ankommt.

Wenn man indessen die Aussage machen will, daß A unter den angegebenen Voraussetzungen ein Minimum sei, muß man sich freilich klar darüber sein, was damit ausschließlich gemeint sein kann, da sonst Verwechselungen mit einem unter anderen Bedingungen gewonnenen Minimum leicht möglich sind. Man muß also genau wissen, unter welchen miteinander zu vergleichenden Werten A der kleinste sein soll. Darüber kann aber hier, wenn man nicht zu flüchtig über die Sache hinweggeht, kein Zweifel bestehen. Vergleicht man nämlich sehr viele an sich mögliche Formänderungszustände miteinander, die etwa unter der gegebenen Belastung eintreten könnten und bildet den Wert von A für jeden nach Vorschrift von Gl. (301), so muß für jenen, der wirklich eintritt, A kleiner sein als für jeden anderen, bei dem die Arbeit der äußeren Kräfte denselben Wert hat. Im übrigen kommt

es, wie schon bemerkt, auf diese Minimumseigenschaft überhaupt nicht an, sondern nur auf die durch Gl. (306) unmittelbar gegebenen Aussage.

Gl. (305) kann an die Spitze der ganzen Elastizitätstheorie gestellt werden, indem sich alle übrigen Beziehungen dieser Theorie aus ihr ableiten lassen. Zunächst gilt dies von den elastischen Grundgleichungen, wie schon daraus hervorgeht, daß die elastischen Grundgleichungen die Gleichgewichtsbedingungen gegen Verschieben an jedem Volumenelemente nach den drei Achsenrichtungen aussprechen und daß diese Gleichgewichtsbedingungen gegen Verschieben durch die Aussage des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten ebenfalls mit umfaßt werden. Wenn man will, kann man aber auch noch in aller Förmlichkeit die Grundgleichungen aus Gl. (305) ableiten. Dazu drücke man die ε und γ in den Differentialquotienten der $\xi\ \eta\ \zeta$ aus und nehme nach Ausführung der Variation unter dem Integralzeichen eine partielle Integration vor, wodurch die Differentialquotienten der virtuellen Verschiebungen $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ durch diese Größen selbst ersetzt werden. Die virtuellen Verschiebungen denke man sich dabei so gewählt, daß am Umfange des Körpers überall $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ zu Null werden. Damit erreicht man, daß die bei der partiellen Integration entstehenden Glieder, die sich auf die Grenzflächen beziehen, verschwinden. Faßt man hierauf alle Glieder zusammen. die unter dem Raumintegrale mit $\delta\xi$ multipliziert sind (wozu auch das Glied $X\delta\xi$ gehört, das vom ersten Gliede der Gl. (305) herrührt) und beachtet man, daß wegen der Willkürlichkeit der Verschiebung das Raumintegral nur dann unter allen Umständen zu Null wird, wenn der andere Faktor von $\delta\xi$ und ebenso der von $\delta\eta$ und $\delta\zeta$ für sich gleich Null ist, so erhält man die elastischen Grundgleichungen. Es wird nicht nötig sein, den hiermit hinreichend beschriebenen Rechnungsgang in aller Ausführlichkeit anzuschreiben.

Wegen der die ganze Elastizitätstheorie umfassenden Bedeutung von Gl. (305) faßt sie auch die

Sätze von Castigliano in sich und sie steht gerade mit ihnen insofern in einem besonders engen Zusammenhang, als diese Sätze ebenfalls auf den Begriff der Formänderungsarbeit gestützt sind. Um so nötiger erscheint es jedoch, auch auf die im Einzelnen bestehenden Unterschiede hinzuweisen. In der technischen Mechanik spielt jener Satz von Castigliano die Hauptrolle, wonach die statisch unbestimmten Größen einer Tragkonstruktion, die an mehr Stellen gestützt ist, als nötig wäre, um sie vollständig festzuhalten, so groß ausfallen, daß dadurch die Formänderungsarbeit zu einem Minimum gemacht wird. Diese Aussage schließt sich dem Wortlaute nach sehr eng an die im Anschlusse an Gl. (306) besprochene an. Trotzdem dürfen aber beide durchaus nicht miteinander verwechselt werden, da das „Minimum" in dem einen Falle einen ganz anderen Sinn hat, als in dem anderen. In Gl. (306) werden nur solche geometrisch mögliche Formänderungszustände miteinander verglichen, die alle zu denselben Lasten gehören und zwar so, daß die Angriffspunkte der Lasten dabei keinen Verschiebungen unterworfen sein sollen. Dagegen werden in dem angeführten Satze von Castigliano jene Formänderungszustände miteinander verglichen, die entstehen würden, wenn man eine der statisch unbestimmten Größen, die dabei als eine Last der Tragkonstruktion angesehen wird, verschiedene Werte annehmen ließe, wobei die zugehörige Auflagerbedingung nicht erfüllt zu werden braucht. Der Satz sagt dann aus, daß unter den in dieser besonderen Weise zum Vergleich miteinander ausgewählten Formänderungszuständen jener, der zugleich die Auflagerbedingung erfüllt und daher wirklich eintritt mit der kleinsten Formänderungsarbeit verbunden ist. Das ist also etwas ganz anderes, als was die Gleichungen (306) oder allgemeiner (305) zunächst aussagen, obschon freilich, wie ich noch zeigen werde, wenn auch erst mit Hülfe einer besonderen Betrachtung der Satz von Castigliano aus dem viel allgemeineren Satze, der in Gl. (305) ausgesprochen ist, abgeleitet werden kann.

Bei diesem Vergleiche kommt aber noch ein anderer Standpunkt in Betracht. In der technischen Literatur spielen

die Sätze von Castigliano, die eine weite Verbreitung und vielfache Anwendung gefunden haben, eine wichtige Rolle, während das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten in Form der Gl. (305) fast gar nicht benutzt worden ist. Den Verfassern von Aufsätzen in technischen Zeitschriften, die mit den Sätzen von Castigliano durch häufigen Gebrauch sehr gut vertraut, mit der Kirchhoffschen Gleichung (305) aber nicht bekannt sind, entgeht es nun nicht, daß es möglich sein muß, eine allgemeinere Formulierung jener Sätze aufzustellen, mit der sich auch andere Fragen, als die nach den Auflagerkräften einer statisch unbestimmten Tragkonstruktion usf. beantworten lassen. Was bei solchen Versuchen angestrebt wird, ist in der Tat häufig nichts anderes, als Gl. (305), sei es in ihrer allgemeinsten, sei es in einer dem betreffenden Falle angepaßten engeren Form. Insofern kann man daher sagen, daß wenigstens nach einer der beiden hier noch möglichen Richtungen hin die Gleichungen (305) oder (306) die in der technischen Literatur zuweilen vergeblich gesuchte Verallgemeinerung der gewöhnlich gebrauchten Castiglianoschen Sätze bilden. Um dies zu zeigen und die richtige Formulierung und fehlerlose Anwendung des allgemeineren Satzes darzutun, hatte ich in die zweite Auflage des dritten Bandes die §§ 63a und 63b aufgenommen. Aber ich habe mich überzeugen müssen, daß ich meinen Zweck damals nicht genügend erreichte und daß die Frage genauer im Einzelnen erörtert werden mußte, um die Sachlage nach allen Seiten hin klarzustellen. Diesem Zwecke sollen auch die folgenden Paragraphen noch dienen. Dabei wird sich auch zeigen, daß eine allgemeinere Fassung der Castiglianoschen Sätze auch noch in anderer Weise möglich ist.

§ 43. Beispiele für die Anwendung des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten.

Wer mit einem so allgemeinen Satze, wie er in Gl. (305) ausgesprochen ist, eine ganz spezielle Aufgabe lösen will, befindet sich ungefähr in der gleichen Lage wie ein Mann, der

mit einem Tausendmarkschein in der Tasche eine Kleinigkeit einkaufen möchte. Wenn er schnell zum Ziele kommen will, sieht er nach, ob er nicht auch noch etwas kleineres Geld daneben hat und läßt, wenn dies zutrifft, den großen Schein ruhig stecken. Wenn dies nicht geht, muß er den Schein, um seinen Einkauf machen zu können, vorher wechseln lassen. Am schnellsten wird er bei diesem Geschäft vorankommen, wenn er sich den Schein nur so weit als nötig, also etwa in Hundertmarkscheine oder in Goldstücke umwechseln läßt und dann den Kaufpreis unter Hinzunahme der Scheidemünze erlegt, über die er außerdem noch verfügt.

Ich habe diesen Vergleich hier vorangestellt, weil er mir die Sache so gut zu treffen scheint, als man dies füglich nur irgend verlangen kann. Insbesondere sieht man daraus, von welchen Erwägungen ich mich bei der Auswahl und der Behandlung der nachfolgenden Beispiele leiten lassen werde.

Zu Sätzen, die zwar weniger umfassend, dafür aber unmittelbar gebrauchsfähiger sind, als der allgemeine Satz gelangt man insbesondere dadurch, daß man als virtuelle Verschiebungen solche ins Auge faßt, die durch kleine Änderungen in der Belastung des Körpers tatsächlich hervorgebracht werden könnten. Falls man nämlich auf Grund von anderen Betrachtungen einfacherer Art bereits in den Stand gesetzt ist, die Formänderungsarbeit A als Funktion der gegebenen Lasten durch einen einfachen Ausdruck darzustellen, findet man daraus die Variation δA, die zu der in Aussicht genommenen Verschiebung gehört, durch Differentiation von A nach diesen Lasten. Freilich spricht die Gleichung, die man alsdann nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten erhält, nichts anderes aus als den einfachen Gedanken, daß die Arbeit der gegebenen Lasten bei einer solchen unendlich kleinen Zustandsänderung gleich dem Zuwachse der in dem Körper aufgespeicherten Energie ist, also nichts anderes als das Energiegesetz. Man kommt damit auf alle jene Betrachtungen zurück, die ich im vierten Abschnitte des dritten Bandes bereits ausführlich vorgenommen habe, insbesondere auf die Sätze von

Castigliano und den Maxwellschen Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen.

Um diese Sätze hier nochmals unabhängig von der früheren Beweisführung abzuleiten, braucht man zu dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten nur noch die Erwägung hinzuzunehmen, daß sich bei einem Körper, der dem Hookeschen Gesetze gehorcht, die zu verschiedenen Lastsystemen für sich gehörigen Formänderungen einfach superponieren, wenn die Lastsysteme zusammen wirken. Voraussetzung ist dabei, daß die Formänderungen so klein sind, daß die Gestalt des ganzen Körpers hierbei nicht merklich geändert wird. Man könnte, wie ich noch hinzufügen will, auch daran denken, mit Hülfe von Gl. (305) zu beweisen, daß dies so ist; aber ein solcher formaler Beweis hätte, physikalisch genommen, keine Berechtigung, da ja das Superpositionsgesetz die ursprüngliche Erfahrungstatsache ist, die erst zur Aufstellung des Hookeschen Gesetzes und hiermit zu der Form der Funktion A geführt hat. Es ist daher richtiger, solche Scheinbeweise zu unterlassen und sofort das Superpositionsgesetz als durch die Erfahrung wenigstens für gewisse Körper unmittelbar gegebene Tatsache hinzunehmen.

Nun betrachte man einen Körper, der hinreichend gestützt ist, so daß er keine Bewegung ohne Formänderung auszuführen vermag. An ihm mögen zunächst zwei Lasten $P_1 P_2$ angreifen. Die Formänderung selbst und hiermit auch die ihr entsprechende Formänderungsarbeit läßt sich dann jedenfalls als eine Funktion dieser beiden Lasten auffassen, so daß wir zunächst

$$A = f(P_1 P_2) \tag{307}$$

setzen können. Wir denken uns ferner eine virtuelle Verschiebung vorgenommen, die auch dadurch wirklich zu Stande gebracht werden könnte, daß man die beiden Lasten um die willkürlichen Beträge δP_1 und δP_2 anwachsen ließe. Dann hat man für δA den Ausdruck

$$\delta A = \frac{\partial A}{\partial P_1} \delta P_1 + \frac{\partial A}{\partial P_2} \delta P_2.$$

Auch die Verschiebungen der Angriffspunkte von P_1 und P_2 hängen unter diesen Umständen von δP_1 und δP_2 ab und wenn wir die Projektionen der Verschiebungswege auf die Richtungslinien von P_1 und P_2 mit δy_1 und δy_2 bezeichnen, können wir

$$\delta y_1 = \alpha_{11} \delta P_1 + \alpha_{12} \delta P_2$$
$$\delta y_2 = \alpha_{22} \delta P_2 + \alpha_{21} \delta P_1$$

setzen, wobei die Koeffizienten α nach dem Superpositionsgesetze von P_1 und P_2 unabhängig sind. Es sind jene Größen, die im dritten Bande als „Einflußzahlen" bezeichnet wurden.

Nachdem δA bereits berechnet ist, können wir das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten in der Form der Gleichung (304) anwenden und erhalten

$$P_1(\alpha_{11} \delta P_1 + \alpha_{12} \delta P_2) + P_2(\alpha_{22} \delta P_2 + \alpha_{21} \delta P_1) - \\ - \left(\frac{\partial A}{\partial P_1} \delta P_1 + \frac{\partial A}{\partial P_2} \delta P_2\right) = 0.$$

Da die δP_1 und δP_2 unabhängig voneinander sind, zerfällt die Gleichung in die beiden anderen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial P_1} &= \alpha_{11} P_1 + \alpha_{21} P_2 \\ \frac{\partial A}{\partial P_2} &= \alpha_{22} P_2 + \alpha_{12} P_1 \end{aligned}\right\}. \tag{308}$$

Hieraus folgt zunächst, daß A eine Funktion zweiten Grades von P_1 und P_2 ist, wenigstens wenn für den Körper das Superpositionsgesetz gültig ist, nach dem die α Konstanten sind. Unter der gleichen Voraussetzung erhält man durch nochmalige Differentiation aus den beiden Gleichungen

$$\frac{\partial^2 A}{\partial P_1 \partial P_2} = \alpha_{21} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 A}{\partial P_2 \partial P_1} = \alpha_{12}$$

und der Vergleich beider Werte miteinander liefert

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} \tag{309}$$

d. h. den Maxwellschen Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen. Die Verschiebungen von denen hierbei die Rede ist, sind natürlich keine virtuellen mehr.

Mit Berücksichtigung von Gl. (309) folgt aus der ersten der Gleichungen (308)

$$\frac{\partial A}{\partial P_1} = \alpha_{11} P_1 + \alpha_{12} P_2$$

und der Wert auf der rechten Seite stellt nach der Bedeutung der Koeffizienten α die Verschiebung y_1 dar, die der Angriffspunkt von P_1 in der Richtung von P_1 bei der Formänderung zurückgelegt hat, die durch die Lasten P_1 und P_2 hervorgebracht wurde. Man hat daher den Satz von Castigliano zunächst für den Fall von zwei Lasten

$$\frac{\partial A}{\partial P_1} = y_1 \quad \text{und ebenso} \quad \frac{\partial A}{\partial P_2} = y_2 .$$

Wie man leicht sieht, läßt sich dieser Satz aber ebenso auch für den Fall von beliebig vielen Lasten herleiten. An Stelle von Gl. (307) tritt dann

$$A = f(P_1 P_2 \cdots P_i \cdots) .$$

Die Projektionen der Verschiebungswege der Angriffspunkte der Lasten bei der durch die P bewirkten Formänderung sind

$$y_1 = \alpha_{11} P_1 + \alpha_{12} P_2 + \cdots + \alpha_{1i} P_i + \cdots$$

usf. Denkt man sich nur P_i um δP_i vermehrt, so wird

$$\delta y_1 = \alpha_{1i} \delta P_i$$

und wenn man die Formänderung, die von δP_i hervorgebracht werden könnte, als eine virtuelle Verschiebung ansieht, findet man nach Gl. (304) nach Wegheben des gemeinschaftlichen Faktors δP_i

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = \alpha_{1i} P_1 + \alpha_{2i} P_2 + \cdots + \alpha_{ii} P_i + \cdots$$

oder unter Hinzunahme des Maxwellschen Satzes, dessen Gültigkeit dadurch nicht geändert wird, daß außer den beiden Lasten, für die er eine Aussage macht, auch noch beliebig viele andere vorhanden sind,

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = \alpha_{i1} P_1 + \alpha_{i2} P_2 + \cdots + \alpha_{ii} P_i + \cdots$$

wofür auch kurz

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = y_i \tag{310}$$

geschrieben werden kann.

Damit ist genügend nachgewiesen, daß das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten alle die einfacheren Sätze über die Formänderungsarbeit, von denen im dritten Bande Gebrauch gemacht wurde, mit umfaßt, d. h. man sieht, um auf den im Eingange gebrauchten Vergleich zurückzukommen, wie man den größeren Geldschein in kleinere, wenn auch noch nicht in die kleinsten Münzen umwechseln kann. Aber auch dafür soll sofort noch ein Beispiel gegeben werden, indem wir weiterhin einen auf Biegung beanspruchten Balken betrachten.

In diesem Falle können wir einen näher bestimmten Ansatz für die Formänderungsarbeit machen, als in dem vorigen allgemeineren Falle, bei dem wir uns mit der Feststellung begnügen mußten, daß A jedenfalls eine Funktion zweiten Grades der an dem Körper angreifenden Einzellasten ist, während die in dieser Funktion auftretenden Koeffizienten α, die Einflußzahlen nicht näher berechnet werden konnten, sondern unbestimmt bleiben mußten. Unter Vernachlässigung des Beitrags, den die Schubspannungen dazu liefern, ist die in einem Längenelement dx des Stabes aufgespeicherte Energie dA

$$dA = \tfrac{1}{2} M d\varphi$$

zu setzen, wenn mit M das Biegungsmoment und mit $d\varphi$ der zu dx gehörige Biegungswinkel bezeichnet wird. Für diesen hat man, wie aus den Lehren des dritten Bandes übernommen werden kann,

$$d\varphi = \frac{M dx}{E\Theta}$$

und wenn man hieraus M entnimmt, erhält man

$$dA = \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 E\Theta dx.$$

An Stelle des Biegungswinkels kann man auch den Krümmungs-

halbmesser ϱ der elastischen Linie einführen, womit der vorige Ausdruck übergeht in

$$dA = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho}\right)^2 E\Theta\,dx$$

oder schließlich unter der Voraussetzung, daß die Durchbiegungen y sehr klein sind, genau genug

$$dA = \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 E\Theta\,dx\,.$$

Jede der drei Formen von dA läßt sich dazu benützen, durch Integration über die ganze Stablänge von $x = 0$ bis $x = l$, die Formänderungsarbeit A zu berechnen. Gewöhnlich ist die letzte Form die bequemste und mit ihr wird

$$A = \frac{E\Theta}{2}\int_0^l \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx\,. \qquad (311)$$

Auch hier ist, wie in der allgemeinen Gleichung (301) A als eine Funktion der die Formänderung beschreibenden Größen dargestellt. Der Unterschied besteht in der Hauptsache darin, daß in Gl. (311) die Integration über die Querschnittsfläche, die in Gl. (301) noch auszuführen war, bereits erledigt ist und daß die Formänderung darin ausschließlich durch die Ordinate y der elastischen Linie ausgedrückt ist. Um unmittelbar von Gl. (301) zu Gl. (311) gelangen zu können, müßte man wissen, wie die ε_x usf. von der Gestalt der elastischen Linie abhängen. In Gl. (311) ist demgegenüber die Kenntnis schon verwertet, daß es genügt, die Bernouillische Annahme, daß die Querschnitte bei der Biegung eben blieben, für die Berechnung zu Grunde zu legen und die von den Schubspannungen bewirkten Glieder γ_{xy} usf. zu vernachlässigen.

Wir wollen nun sehen, was sich mit Hülfe des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten aus Gl. (311) weiter schließen läßt. Dabei mag zunächst vorausgesetzt werden, daß der Balken, der auf beliebig vielen Stützen aufliegen kann, eine stetig verteilte Last trägt. Die Belastungsintensität p kann

dabei eine sonst beliebig gegebene, vorläufig aber stetige Funktion von x sein.

Wir unterwerfen den Balken einer virtuellen Verschiebung, durch die jedes y um ein δy vergrößert (oder bei negativem Vorzeichen von δy verkleinert) wird. Dabei ist δy als eine im übrigen willkürliche jedoch stetige Funktion von x zu betrachten. Die virtuelle Verschiebung wird daher jetzt im Gegensatze zu den früheren Anwendungen nicht so ausgewählt, wie sie einer bestimmten Belastungsänderung entsprechen würde, sondern ganz willkürlich gelassen, mit dem Vorbehalte darüber später noch so verfügen zu können, wie es sich als nützlich herausstellen wird.

Zum Balkenelemente dx gehört eine Belastung $p\,dx$, die bei der virtuellen Verschiebung die Arbeit $p\,dx\,\delta y$ leistet. Auf Grund von Gl. (304) erhalten wir daher jetzt

$$\int_0^l p\,\delta y\,dx - \frac{E\Theta}{2}\,\delta \int_0^l \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx = 0$$

oder, wenn die Variation unter dem Integralzeichen vorgenommen wird,

$$\int_0^l p\,\delta y\,dx - E\Theta \int_0^l \frac{d^2y}{dx^2}\,\delta\,\frac{d^2y}{dx^2}\,dx = 0. \tag{312}$$

Für die weitere Verwertung der Gleichung wollen wir jetzt annehmen, daß sich die virtuelle Verschiebung, die ja ganz willkürlich angenommen werden darf, nicht über die ganze Balkenlänge erstrecke und daß namentlich an den beiden Enden nicht nur δy gleich Null ist (was schon wegen der bestehenden Auflagerbedingungen zutreffen muß, wenn wir vermeiden wollen, daß auch noch die virtuellen Arbeiten der Auflagerkräfte in die Gleichung mit aufgenommen werden müssen), sondern daß auch $\delta\,\frac{dy}{dx}$, oder was dasselbe ist, $\frac{d\,\delta y}{dx}$ dort gleich Null bleibt. Dann läßt sich das letzte Integral in der vorhergehenden Gleichung durch partielle Integration auf

eine andere Form bringen. Zunächst hat man

$$\int_0^l \frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^2\delta y}{dx^2}dx = \left[\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d\delta y}{dx}\right]_0^l - \int_0^l \frac{d^3y}{dx^3}\frac{d\delta y}{dx}dx,$$

wobei das erste Glied auf der rechten Seite wegen der gewählten Grenzbedingungen verschwindet. Indem man nochmals eine partielle Integration vornimmt, erhält man weiter

$$\int_0^l \frac{d^3y}{dx^3}\frac{d\delta y}{dx}dx = \left[\frac{d^3y}{dx^3}\delta y\right]_0^l - \int_0^l \frac{d^4y}{dx^4}\delta y\, dx.$$

Auch hier verschwindet das erste Glied der ersten Seite und Gl. (312) geht damit über in

$$\int_0^l p\,\delta y\, dx - E\Theta\int_0^l \frac{d^4y}{dx^4}\delta y\, dx = 0.$$

Jetzt lassen sich beide Integrale zu einem einzigen zusammenfassen, womit man

$$\int_0^l \left(p - E\Theta\frac{d^4y}{dx^4}\right)\delta y\, dx = 0$$

erhält. Damit diese Gleichung für jede beliebige Wahl der Funktion δy erfüllt sein kann, muß aber der Faktor von δy unter dem Integralzeichen an jeder Stelle x zu Null werden. Als Schlußresultat der Betrachtung finden wir daher die Differentialgleichung der elastischen Linie in der Form

$$E\Theta\frac{d^4y}{dx^4} = p. \tag{313}$$

Der Leser sieht natürlich ein, daß man zu diesem einfachen Ergebnisse auf Grund der Lehren des dritten Bandes viel kürzer hätte gelangen können; aber wenn er daran denkt, daß es nicht ohne Umständlichkeiten abgeht, wenn man kleine Einkäufe mit Tausendmarkscheinen machen will, wird er sich über die längere Auseinandersetzung, die hier nötig war, nicht weiter wundern.

Gleichung (313) läßt sich natürlich mit $p = 0$ auch auf solche Stellen des Balkens anwenden, die unbelastet sind. Wenn ferner an Stelle der stetigen Belastung, die bisher vorausgesetzt war, eine Belastung mit Einzellasten tritt, bleibt an den unbelasteten Stellen Gl. (313) mit $p = 0$ bestehen, während an der Angriffsstelle der Einzellast $\frac{d^3y}{dx^3}$ einen Sprung macht, der auf Grund der vorhergehenden Formeln ebenfalls leicht angegeben werden kann. Es ist aber nicht nötig, dies noch weiter zu besprechen, da es sich jetzt nicht um eine Theorie des gebogenen Balkens handelt, die schon längst mit einfacheren Mitteln erledigt wurde, sondern nur um eine Auseinandersetzung über die Art, wie man sich des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten bedienen kann.

Auf eine Aussage mag noch hingewiesen werden. Man kann sich nämlich mit einem Balken, der Einzellasten trägt, auch eine solche virtuelle Verschiebung vorgenommen denken, bei der die Angriffspunkte aller Einzellasten in Ruhe bleiben. Das würde darauf hinauskommen, daß man nur die zwischen den Lasten liegenden Balkenabschnitte beliebigen, aber stetigen Verbiegungen unterwirft. Jedem in dieser Weise erhaltenen Formänderungszustande entspricht ein bestimmter nach den vorhergehenden Vorschriften zu berechnender Wert der Formänderungsarbeit A. Bezeichnet man die Änderung, die A gegenüber dem tatsächlich eintretenden Zustande durch dessen willkürliche unendlich kleine Abänderung erfährt, mit δA, so ist nach dem Prinzipe der virtuellen Geschwindigkeiten unter den angegebenen Umständen

$$\delta A = 0.$$

Das ist die notwendige Bedingung dafür, daß der tatsächlich eintretende Zustand einem Minimum der Formänderungsarbeit entspricht. Ich erwähne diese Aussage aber nicht, um sie wirklich zu empfehlen, sondern nur um zu zeigen, wie man sie, wenn man Wert auf diese Formulierung legt, richtig abgeben kann. Die Bemerkung, daß der tatsächliche Zustand einem Minimum der Formänderungsarbeit entspricht, besticht

durch ihre Kürze und Anschaulichkeit. Aber diese Kürze hat andererseits den erheblichen Nachteil, daß die näheren Bedingungen, unter denen das Minimum eintritt, übergangen und später vielleicht vergessen werden, was natürlich zu Fehlern führen muß.

Schließlich bemerke ich noch, daß ich das einfache Beispiel des gebogenen Balkens nur deshalb zur Erläuterung des Verfahrens bei der Anwendung des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten gewählt habe, weil man bei diesem bekannten Gegenstande den Vorgang mit den geringsten Schwierigkeiten verfolgen kann. Es sieht nachher, da man nur Bekanntes wiederfindet, freilich leicht so aus, als wenn es sich nur um eine überflüssige Erschwerung einer an sich ganz einfachen Sache handle. Aber man bedenke, daß man in derselben Weise, wie es hier gezeigt wurde, auch die Differentialgleichungen für die Formänderung in weit verwickelteren Fällen ableiten kann. Wenn ich an Stelle des Balkens etwa die gebogene Platte als Beispiel behandelt hätte, wäre die Betrachtung zwar wegen des verwickelteren Ausdrucks für die Formänderungsarbeit etwas länger geworden als hier, aber nicht viel und sie hätte sich namentlich genau in derselben Weise abgespielt. Die Mühe, die zur Ableitung der Differentialgleichung der gebogenen Platte auf diesem Wege aufzuwenden gewesen wäre, würde sich dann kaum als größer herausgestellt haben, als jene, die zu deren Ableitung im zweiten Abschnitte auf Grund der Gleichgewichtsbetrachtung am einzelnen Plattenelemente nötig war. Für die Dienste, die das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten in solchen Fällen, die im vorhergehenden noch nicht besprochen worden sind, zu leisten vermag, werde ich übrigens im folgenden noch ein Beispiel geben.

§ 44. Die Variation des Spannungszustandes.

Der vorhergehenden Betrachtung läßt sich eine andere gegenüberstellen, die zwar sehr eng mit ihr verwandt ist, uns die Sache aber doch noch von einer ganz anderen Seite her kennen lehrt.

In § 42 hatten wir uns dafür entschieden, die Formänderungsarbeit A als Funktion der Formänderungsgrößen ε_x usf. darzustellen. Daran wurde auch bei allen Anwendungen, die wir im vorigen Paragraphen besprachen, festgehalten und zwar auch dann, wenn es hieß, wir wollten uns die Formänderungsarbeit als Funktion der Lasten P vorstellen. Diese Aussage hatte nur den Sinn und konnte nur den Sinn haben, daß die Formänderungsgrößen ε_x usf. selbst von den Lasten abhängig sind, so daß, wenn wir sie uns in den Lasten ausgedrückt und die Integration in Gl. (301) über das Volumen des Körpers ausgeführt denken, in letzter Linie eine Funktion der P herauskommen mußte.

Jetzt wollen wir dagegen den entgegengesetzten Weg einschlagen und die zunächst durch Gl. (300) gegebene Formänderungsarbeit ausschließlich als eine Funktion der Spannungsgrößen σ_x usf. mit Hülfe des Elastizitätsgesetzes darstellen. Wir setzen daher

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\frac{m+1}{m}\sigma_x - \frac{1}{m}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\right); \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

usf. in Gl. (300) und erhalten damit nach einfacher Umformung

$$A = \frac{1}{2}\int\left\{\frac{m+1}{mE}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{1}{mE}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 + \frac{1}{G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)\right\}dv. \tag{314}$$

Dieser Ausdruck beruht, wie aus seiner Ableitung hervorgeht, auf dem Elastizitätsgesetze und zwar in der besonderen Form des Hookeschen Gesetzes. Wir können uns aber weiterhin darauf beschränken, die statisch unbestimmte Aufgabe ins Auge zu fassen, eine Spannungsverteilung aufzusuchen, die an jedem Volumenelemente des Körpers Gleichgewicht herstellt. Unter allen diesen statisch möglichen (nämlich vom Standpunkte der Mechanik starrer Körper aus gleich gut möglichen) Spannungsverteilungen befindet sich auch jene, die tatsächlich zu stande kommt, wenn der Körper dem Hookeschen Gesetze folgt und es fragt sich jetzt, wodurch sich diese vor den übrigen auszeichnet.

Zu diesem Zwecke denken wir uns irgend einen durch die Größen σ_x usf. gekennzeichneten statisch möglichen Spannungszustand unendlich wenig abgeändert um die im übrigen willkürlichen Beträge $\delta\sigma_x$ usf., die jedoch einerseits stetige Funktionen der Koordinaten xyz sein sollen und außerdem der Bedingung entsprechen müssen, daß der abgeänderte Spannungszustand wieder statisch möglich ist, d. h. an jedem Volumenelemente Gleichgewicht herstellt. Dazu gehört, daß der durch die Größen $\delta\sigma_x$ usf. bezeichnete Spannungszustand, der dem ursprünglich gegebenen übergelagert wird, selbst an jedem Volumenelemente Gleichgewicht herstellt und zwar ohne daß dabei äußere Kräfte, weder Massenkräfte, noch Lasten an der Oberfläche mitwirken. Die Größen $\delta\sigma_x$ usf. müssen daher den gewöhnlichen Gleichgewichtsbedingungen an einem Volumenelemente entsprechen, von denen die erste lautet

$$\frac{\partial\delta\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\delta\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\delta\tau_{zx}}{\partial z}=0$$

und außerdem wollen wir sie, um sicher zu sein, daß das Gleichgewicht auch überall an der Grenzfläche aufrecht erhalten wird, ohne daß dabei äußere Kräfte mitzuwirken brauchen, der Bedingung unterwerfen, daß sie an der Grenzfläche überall zu Null werden*).

Anstatt diese Variation des Spannungszustandes über den ganzen Körper zu erstrecken, können wir sie auch nur innerhalb eines beliebig abgegrenzten Teiles des Körpers vornehmen, wobei jedoch an den Flächen, mit denen dieses Stück an den Rest angrenzt, die Spannungsgrößen $\delta\sigma_x$ usf. bereits überall gleich Null sein sollen, damit wir sicher sind, daß an jedem Volumenelemente nicht nur des Teilstücks, sondern des ganzen Körpers Gleichgewicht besteht.

*) Man kann anstatt dieser engeren Bedingung, wie leicht ersichtlich, auch eine allgemeinere angeben, bei der die Spannungsvariationen am Rande nicht zu verschwinden brauchen. Um nicht zu weitläufig zu werden, will ich aber darauf vorläufig nicht eingehen.

Für den in dieser Weise hergestellten neuen Spannungszustand $\sigma_x + \delta\sigma_x$ usf. kann die durch Gl. (314) definierte Größe A ebenfalls berechnet werden. Sie unterscheidet sich von dem Werte für den durch σ_x usf. beschriebenen Zustand um einen Betrag δA, der aus Gl. (314) gefunden wird zu

$$\delta A = \int \left\{ \frac{m+1}{mE} (\sigma_x \delta\sigma_x + \sigma_y \delta\sigma_y + \sigma_z \delta\sigma_z) \right.$$
$$- \frac{1}{mE}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)(\delta\sigma_x + \delta\sigma_y + \delta\sigma_z)$$
$$\left. + \frac{1}{G}(\tau_{xy}\delta\tau_{xy} + \tau_{xz}\delta\tau_{xz} + \tau_{yz}\delta\tau_{yz}) \right\} dv.$$

Das gilt zunächst unabhängig davon, ob der durch σ_x usf. beschriebene Ausgangszustand jener war, der unter Voraussetzung des Hookeschen Gesetzes wirklich zu stande kommt, oder nicht. Nehmen wir aber an, daß er es war, dann läßt sich für δA auch schreiben

$$\delta A = \int (\varepsilon_x \delta\sigma_x + \varepsilon_y \delta\sigma_y + \varepsilon_z \delta\sigma_z + \gamma_{xy}\delta\tau_{xy} + \gamma_{xz}\delta\tau_{xz} + \gamma_{yz}\delta\tau_{yz})\, dv.$$

Dieser Ausdruck läßt sich noch durch partielle Integrationen umformen, falls man voraussetzen darf, daß sich die ε und γ in den Differentialquotienten der Verschiebungen $\xi\eta\zeta$ ausdrücken lassen (vgl. hierzu § 46). Zunächst hat man

$$\int \varepsilon_x \delta\sigma_x dv = \int\int dy\,dz \int \frac{\partial \xi}{\partial x} \delta\sigma_x dx$$
$$= \int\int dy\,dz \left([\xi \delta\sigma_x] - \int \xi \frac{\partial \delta\sigma_x}{\partial x} dx \right).$$

Der in der eckigen Klammer stehende Wert bezieht sich auf die Körpergrenzen, an denen wir aber $\delta\sigma_x$ verschwinden ließen und es bleibt daher

$$\int \varepsilon_x \delta\sigma_x dv = -\int \xi \frac{\partial \delta\sigma_x}{\partial x} dv.$$

In derselben Weise erhält man

$$\int \gamma_{xy} \delta\tau_{xy} dv = -\int \xi \frac{\partial \delta\tau_{xy}}{\partial y} dv - \int \eta \frac{\partial \delta\tau_{xy}}{\partial x} dv$$

und entsprechend bei den übrigen Gliedern. Faßt man alle Glieder zusammen, so wird

$$\delta A = -\int \left\{ \xi \frac{\partial \delta \sigma_x}{\partial x} + \eta \frac{\partial \delta \sigma_y}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \delta \sigma_z}{\partial z} + \xi \frac{\partial \delta \tau_{xy}}{\partial y} + \eta \frac{\partial \delta \tau_{xy}}{\partial x} + \xi \frac{\partial \delta \tau_{xz}}{\partial z} \right.$$
$$\left. + \zeta \frac{\partial \delta \tau_{xz}}{\partial x} + \eta \frac{\partial \delta \tau_{yz}}{\partial z} + \zeta \frac{\partial \delta \tau_{yz}}{\partial y} \right\} dv.$$

Die drei mit ξ behafteten Glieder in der Klammer liefern aber nach der vorher angeschriebenen Gleichgewichtsbedingung zwischen den Spannungen $\delta \sigma_x$ usf. zusammen den Wert Null und ebenso ist es mit den andern. Wir erhalten daher

$$\delta A = 0 \tag{315}$$

als Bedingung für den tatsächlich eintretenden Spannungszustand und, wenn man will, kann man das auch dahin aussprechen, daß für diesen der nach Gl. (314) berechnete Wert der Formänderungsarbeit zu einem Minimum wird.

Um eine mißverständliche Auffassung dieser Betrachtung nach Möglichkeit zu verhüten, muß ich noch einige Bemerkungen beifügen. Zunächst ist zu betonen, daß das δA in Gl. (315) einen ganz anderen Sinn hat, als das δA in der gleichlautenden Gleichung (306). In Gl. (306) wurden geometrisch mögliche Formänderungszustände miteinander verglichen, die dem tatsächlich eintretenden unendlich nahe benachbart waren, während in Gl. (315) statisch mögliche Spannungszustände miteinander verglichen werden. Die willkürliche Variation eines Spannungszustandes, die nur der Bedingung der statischen Möglichkeit unterworfen ist, hat aber mit einer Variation des Formänderungszustandes, die geometrisch möglich ist, ohne den Zusammenhang des Körpers zu zerstören, überhaupt nichts zu tun.

Um sich diesen sehr erheblichen Unterschied noch weiter klar zu machen, nehme man einmal an, der Körper sei in seine einzelnen Volumenelemente auseinander genommen und hierauf jedes einzelne so deformiert, wie es irgend einem an sich statisch möglichen Spannungszustande entspricht. Wenn man nachher versuchen wollte, die deformierten Volumenele-

mente wieder zu einem ganzen Körper zusammenzusetzen, würde man bemerken, daß dies nicht geht, weil die einzelnen Stücke nicht mehr zusammenpassen. Das kommt daher, daß bei einer beliebigen Wahl des Spannungszustandes σ_x usf., der nur den Gleichgewichtsbedingungen genügt, Formänderungen ε_x usf. in den einzelnen Volumenelementen entstehen, die sich nicht mehr als Differentialquotienten von drei Funktionen $\xi\eta\zeta$ der Koordinaten darstellen lassen. An jedem Volumenelemente entsprechen den sechs Spannungsgrößen auch sechs Formänderungsgrößen $\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z \gamma_{xy} \gamma_{xz} \gamma_{yz}$, die nach dem Elastizitätsgesetze daraus abzuleiten sind und im allgemeinen, d. h. bei beliebiger Wahl des Spannungszustandes ist nicht zu erwarten, daß sich diese sechs Funktionen auf nur drei Funktionen $\xi\eta\zeta$ zurückführen lassen, wie es sein müßte, wenn die Größen ε und γ zu einer Formänderung ohne Zerreissung des Zusammenhangs des ganzen Körpers gehören sollten.

Bei der Anwendung des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten betrachtet man virtuelle Formänderungen, also solche, die möglich sind, ohne den Zusammenhang des Körpers zu stören, verlangt aber nicht, daß die Spannungen, die sich auf Grund des Elastizitätsgesetzes für den abgeänderten Zustand berechnen ließen, ebenfalls den Gleichgewichtsbedingungen an jedem Körperelemente entsprechen müßten. Im Gegensatze dazu wird von der Variation des Spannungszustandes, die in diesem Paragraphen betrachtet wurde, verlangt, daß der abgeänderte Spannungszustand den Gleichgewichtsbedingungen ebenso genügt, wie der ursprüngliche; dagegen wird nicht verlangt, daß dieser Spannungszustand zu einer nach dem Elastizitätsgesetze daraus zu berechnenden Formänderung gehöre, die geometrisch möglich wäre, ohne den Zusammenhang des Körpers zu zerreißen. Je nachdem man sich für das eine oder andere Vorgehen entscheidet, die an sich gleichberechtigt sind, muß man die Größe A entweder in den Formänderungsgrößen oder in den Spannungsgrößen, also nach Gl. (301) oder nach Gl. (314) ausdrücken.

Der wirklich eintretende Spannungszustand unterscheidet sich von allen anderen statisch möglichen darin, daß er zugleich zu Formänderungen der einzelnen Volumenelemente führt, die miteinander verträglich sind und der wirklich eintretende Formänderungszustand unterscheidet sich, von allen anderen geometrisch möglichen dadurch, daß er zu Spannungen führt, die an jedem Volumenelemente Gleichgewicht herstellen. Will man einen dieser Zustände mit einem unendlich benachbarten vergleichen, so muß man dabei notwendig entweder die eine Bedingung fallen lassen, daß der neue Zustand auch wieder unter Hinzunehmen des Elastizitätsgesetzes den Gleichgewichtsbedingungen genügen soll oder die andere Bedingung, daß der dazu berechnete Formänderungszustand geometrisch möglich sein soll, ohne den Zusammenhang aufzuheben.

Hoffentlich genügt diese ausführliche Darlegung, um den gelehrten Kritikern, die die Richtigkeit meiner früheren Veröffentlichung dieser Betrachtungen in der zweiten Auflage des dritten Bandes bestritten hatten, jetzt jeden Zweifel darüber zu nehmen.

§ 45. Beispiele für die Anwendung des Satzes vom variierten Spannungszustande.

Man betrachte irgend eine statisch unbestimmte Tragkonstruktion, etwa einen beiderseits eingespannten Bogenträger. Dabei sollen aber in die Tragkonstruktion auch die Widerlager oder Pfeiler und alle Teile der Erde mit eingerechnet werden, in denen sich die durch die Belastung der Tragkonstruktion hervorgerufenen Spannungen noch bemerklich machen. Indessen steht es, wenn man die Aufgabe dadurch vereinfachen will, auch frei, gewisse Teile, z. B. die Widerlager oder die Erde als starr vorauszusetzen. Das geschieht dadurch, daß man annimmt, die betreffenden Teile wären aus einem Stoffe hergestellt, für den die Elastizitätskonstanten E und G als unendlich groß betrachtet werden könnten. Dann tragen diese Teile zu der gesamten nach Gl. (314) berechneten Formänderungsarbeit nichts bei.

Handelt es sich um einen eingespannten Bogenträger, so denke man sich einen Querschnitt gelegt und alle Spannungen, die in diesem Querschnitte übertragen werden, zu einer durch den Schwerpunkt gehenden Resultierenden und einem resultierenden Kräftepaare zusammengesetzt. Die beiden Komponenten der Resultierenden und das Moment des Kräftepaars sind unbekannt und sie werden in der Theorie der Tragkonstruktionen als die statisch unbestimmten Größen des Problems der Spannungsermittelung bezeichnet. In anderen Fällen wird man andere Größen angeben können, die dieselbe Bezeichnung verdienen. Durch diese Bezeichnung soll nämlich ausgesprochen werden, daß auch für alle anderen Querschnitte die Resultierende aller Spannungen und das Moment ihres Kräftepaars nach den Lehren der Statik starrer Körper angegeben werden können, sobald die statisch unbestimmten Größen auf irgend einem Wege ermittelt sind. Außerdem wird durch den Gebrauch dieser Bezeichnung auch noch die stillschweigende Voraussetzung eingeführt, daß man genau genug, also z. B. nach den gewöhnlichen Biegungsformeln usf. die Spannungen an jeder Stelle anzugeben vermag, nachdem die Biegungsmomente usw. bekannt geworden sind. Hiermit läßt sich auch die Formänderungsarbeit entweder unmittelbar nach Gl. (314) oder wenigstens nach irgend einer vereinfachten Formel berechnen, die man sich aus Gl. (314) etwa durch eine Integration über den ganzen Querschnitt usf. hervorgegangen denken kann. In dem Ausdrucke für die Formänderungsarbeit, den man auf diese Weise gewinnt, kommen als unbekannte Größen nur noch die statisch unbestimmten Größen des Problems vor. Wenn man über die elastischen Eigenschaften des Materials nichts wüßte, hätte man auch kein Mittel, um diese Größen zu bestimmen; man könnte jeder von ihnen einen beliebigen Wert beilegen und käme damit zu einem Spannungszustande der ganzen Konstruktion, der alle Gleichgewichtsbedingungen der Statik an jedem Volumenelemente befriedigte, dabei aber nicht mehr und nicht weniger Wahrscheinlichkeit für sein Eintreten hätte, als jeder andere, der

durch eine andere Wahl der statisch unbestimmten Größen bedingt wäre.

Hier liegen, wie man sieht, alle Voraussetzungen für die Anwendung des durch Gl. (315) ausgesprochenen Satzes vor, falls man weiß, daß alle Stoffe, aus denen sich die Tragkonstruktion zusammensetzt, dem Hookeschen Elastizitätsgesetze gehorchen. Bezeichnet man die statisch unbestimmten Größen mit X_1, X_2 usf., so kann man von dem tatsächlich eintretenden Spannungszustande zu einem ihm unendlich nahe benachbarten gelangen, der ebenfalls statisch möglich ist, indem man die X um beliebige Werte δX_1, δX_2 usf. ändert. Das zugehörige δA kann durch Differentiationen an dem bereits als Funktion der X dargestellten Ausdrucke von A erhalten werden zu

$$\delta A = \frac{\partial A}{\partial X_1}\,\delta X_1 + \frac{\partial A}{\partial X_2}\,\delta X_2 + \cdots$$

und damit Gl. (315) für jede beliebige Wahl von δX_1 oder δX_2 usf. erfüllt ist, muß man

$$\frac{\partial A}{\partial X_1} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial X_2} = 0 \text{ usf.} \tag{316}$$

setzen. Dadurch erhält man so viele Gleichungen als statisch unbestimmte Größen vorkommen und diese werden daraus durch Auflösung der Gleichungen nach den Unbekannten gefunden.

Hier schalte ich noch die Bemerkung ein, daß der variierte Spannungszustand freilich im allgemeinen die bei der Ableitung von Gl. (315) zunächst eingeführte engere Bedingung $\delta\sigma_x = 0$ usf. an den Grenzen nicht erfüllt, wohl aber die weitere Bedingung, die zur Gültigkeit der Gl. (315) auch schon hinreicht, daß nämlich die Spannungen $\delta\sigma_x$ usf. an den Grenzen mit dem Umstande verträglich sind, daß keine weitere Lasten an den Grenzflächen hinzukommen. Dies geht aus dem Vergleiche der sich auf die Grenzen beziehenden Glieder mit den Gl. (7) des dritten Bandes (S. 26 der dritten Aufl.) hervor.

Die Gleichungen (316) sind die Gleichungen von Castigliano zur Bestimmung der statisch unbestimmten Größen. Der Satz

von der Variation des Spannungszustandes ist daher die allgemeinste Fassung, die man diesem Castiglianoschen Satze geben kann. Auch das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten umfaßte, wie in § 43 gezeigt wurde, die gewöhnlich benutzte Aussage des Castiglianoschen Satzes. Hier aber, wo wir nicht den Formänderungszustand, sondern den Spannungszustand variieren, ist der Zusammenhang viel enger und unmittelbarer.

Als weiteres Beispiel für die Anwendung von Gl. (315) betrachte ich den Spannungszustand in einer Scheibe. Dieser wurde schon im zweiten Abschnitte in § 8 untersucht und es wurde nachgewiesen, daß die Aufgabe der Spannungsermittelung von der Integration der Differentialgleichung (53) für die Spannungsfunktion F abhängt. Hier soll gezeigt werden, daß man zu demselben Ergebnisse auch auf Grund des Satzes vom variierten Spannungszustande oder mit anderen Worten auf Grund des Castiglianoschen Satzes in seiner allgemeinsten Fassung gelangt. Der Nachweis ist hier freilich weniger einfach als früher; er soll aber dazu dienen, den genannten Satz gehörig zu beleuchten, damit man sieht, wie er in solchen Fällen richtig anzuwenden ist.

Der Spannungszustand der Scheibe soll jetzt nur durch Lasten hervorgebracht sein, die am Umfange angreifen. Setzt man dann, wie in den Gl. (49) und (50)

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

so ist damit an jedem Scheibenelement Gleichgewicht hergestellt. Dabei kann zunächst F eine willkürliche (stetige) Funktion der Koordinaten sein, die nur die Grenzbedingungen am Umfange zu erfüllen braucht. Setzt man diese Werte in Gl. (314) ein, so erhält man für die Formänderungsarbeit

$$A = \frac{1}{2}\int\left\{\frac{m+1}{mE}\left(\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)^2\right) - \frac{1}{mE}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)^2 \right.$$
$$\left. + \frac{1}{G}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2\right\} dv.$$

Für δA erhält man daraus durch Vornahme der Variation unter dem Integralzeichen und Zusammenziehen der Glieder

$$\delta A = \int \left\{ \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 \delta F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 \delta F}{\partial y^2}\right) - \frac{1}{mE}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 \delta F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 \delta F}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{G}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\partial^2 \delta F}{\partial x \partial y}\right\} dv.$$

Die einzelnen Glieder, in die sich das Integral zerlegen läßt, kann man durch eine partielle Integration umformen, wie am ersten Gliede gezeigt werden soll. Bezeichnet man die konstante Scheibendicke mit h, setzt also $dv = h\,dx\,dy$, so wird

$$\int \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 \delta F}{\partial x^2}\,dv = h\int dy \int \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 \delta F}{\partial x^2}\,dx$$
$$= h\int dy \left\{\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial \delta F}{\partial x}\right] - \int \frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\cdot\frac{\partial \delta F}{\partial x}\,dx\right\}.$$

Das in eckigen Klammern stehende Glied bezieht sich auf die Grenzen und es verschwindet, wenn wir die willkürliche Variation von F und hiermit des Spannungszustandes der Bedingung unterwerfen, daß sich am Rande der Scheibe nichts darin ändern soll. Ferner hat man

$$\int \frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\cdot\frac{\partial \delta F}{\partial x}\,dx = \left[\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\cdot\delta F\right] - \int \frac{\partial^4 F}{\partial x^4}\,\delta F\,dx.$$

Auch hier verschwindet das sich auf die Grenzen beziehende Glied und im ganzen wird daher

$$\int \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 \delta F}{\partial x^2}\,dv = \int \frac{\partial^4 F}{\partial x^4}\,\delta F\,dv.$$

In derselben Weise lassen sich auf alle übrigen Glieder von δA umformen. Nachdem dies geschehen ist, kann man die Glieder unter Beachtung des zwischen den Elastizitätskonstanten E, G und m bestehenden Zusammenhanges zusammenziehen und findet

$$\delta A = \frac{1}{E}\int \left\{\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + 2\,\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2}\right\}\delta F\,dv.$$

Bei dem wirklich eintretenden Spannungszustande muß δA nach Gl. (315) für jedes willkürliche δF zu Null werden.

Das ist nur möglich, wenn F an jeder Stelle der Bedingung

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} = 0 \qquad (317)$$

genügt. Das ist aber die früher in einfacherer Weise abgeleitete Gl. (53). Wir sind dabei freilich zu keinem neuen Ergebnisse gelangt; die Betrachtung sollte vielmehr nur dazu dienen, die Anwendung des Satzes vom variierten Spannungszustande zur Ableitung der Differentialgleichungen zu lehren, denen die den Spannungszustand beschreibenden Größen genügen müssen.

§ 46. Die Eigenspannungen.

Als Eigenspannungen bezeichnet man jene Spannungen, die in einem Körper auftreten können, wenn gar keine Lasten an ihm angreifen. Auch die Wärmespannungen gehören nach dieser allgemeinen Definition zu den Eigenspannungen. Gewöhnlich meint man aber, wenn von den Eigenspannungen die Rede ist, nur solche Spannungen, die nicht durch Temperaturunterschiede zwischen den einzelnen Teilen des Körpers verursacht sind, sondern auch im „natürlichen Zustande" des Körpers fortbestehen. Als der „natürliche" Zustand des Körpers ist dabei jener bezeichnet, bei dem alle äußeren Ursachen zum Auftreten von Spannungen, also sowohl Lasten als Temperaturunterschiede beseitigt sind.

Diese Eigenspannungen im engeren Sinne, von denen weiterhin die Rede sein soll, haben ihren Entstehungsgrund in dem Vorgange bei der Herstellung des Körpers. Wenn der Körper ein Gußstück ist, werden sie auch als „Gußspannungen" bezeichnet und sie sind in diesem Falle darauf zurückzuführen, daß es nicht möglich ist, die Wärmeabführung nach dem Einfüllen des flüssigen Metalls in die Gußform genau so zu regeln, daß der Körper durch die ganze Masse hindurch gleichzeitig erstarrte. Mit dem Erstarren sind Volumenänderungen verbunden, die nicht mehr ungehindert vor sich gehen können, wenn z. B., wie es gewöhnlich der Fall sein wird, ein äußerer Mantel bereits erstarrt ist, während der

innere Kern noch flüssig ist und erst zu erstarren beginnt. Aber auch bei einem Schmiedestück, dessen Teile während des Schmiedens nicht auf völlig gleicher Temperatur gehalten werden können und bei dem auch nicht alle Teile während des Schmiedens die gleiche Formänderung erfahren können, läßt sich nicht vermeiden, daß das fertige Stück nach seiner Abkühlung in Eigenspannungen versetzt ist.

Die Gußspannungen sind zuweilen so hoch, daß das Gußstück nach dem Abkühlen von selbst oder unter ganz geringen Lasten oder auch unter dem Einflusse einer geringen einseitigen Erwärmung, wenn es z. B. in der Sonne liegt, plötzlich zerspringt. Eine der Hauptsorgen des Gießereiingenieurs besteht darin, durch geeignete Formgebung des Gußstücks, sofern er auf diese einzuwirken vermag, sowie durch eine passende Regelung des Abkühlungsvorgangs auf eine Verminderung der Gußspannungen hinzuwirken. Auch nachdem ein Stück durch Gießen oder durch Schmieden hergestellt ist, vermag man noch durch geeignete Mittel die Eigenspannungen nachträglich herabzusetzen; insbesondere durch wiederholtes Ausglühen. Auch häufig wiederholte Erschütterungen bringen mit der Zeit eine Umlagerung in dem molekularen Aufbau des Körpers herbei, durch die sich der Zwang, der sich in den Eigenspannungen ausspricht, allmählich ausgleicht.

Das einfachste Mittel, um sich auf experimentellem Wege davon zu überzeugen, ob in einem Körper Eigenspannungen von merklichem Betrage vorkommen, besteht darin, daß man den Körper in mehrere Teile zerschneidet. Wenn der Körper im natürlichen Zustande spannungsfrei war, erfahren die Teile nach dem Zerschneiden keine Formänderung, während man im anderen Falle aus der Größe und Art der Formänderung einen Rückschluß auf die Eigenspannungen ziehen kann, die vorher, als der Körper noch zusammenhing, durch die Schnittfläche hindurch übertragen wurden.

Wie man sieht, handelt es sich bei den Eigenspannungen um einen sehr wichtigen Gegenstand, der aber im Verhältnisse

zu seiner Wichtigkeit bisher nur sehr geringe Beachtung in der Theorie gefunden hat. Wenigstens die Ingenieure, die sich auf Grund ihrer Erfahrungen meistens eine ganz zutreffende Auffassung von den Eigenspannungen gebildet haben, haben sich um deren theoretische Auseinandersetzung kaum gekümmert. Schlimmer noch steht es mit den Theoretikern, die sich mit der Frage zwar beschäftigt haben, aber durch den Mangel einer richtigen physikalischen Auffassung auf ganz falsche Wege geführt wurden. Noch bis in die jüngste Zeit hinein konnte man theoretische Arbeiten sehen, durch die bewiesen werden sollte, daß entweder — wie früher — in einem Körper überhaupt oder doch — wie späterhin — in einem Körper, der einen einfach zusammenhängenden Raum einnimmt, überhaupt keine Eigenspannungen auftreten könnten. Mir selbst ist es z. B. von einem mathematischen Kritiker vorgeworfen worden, daß ich im dritten Bande meiner Vorlesungen bei der Behandlung der Eindeutigkeit der Lösung des Elastizitätsproblems (§ 69 der dritten Aufl.) den üblichen Scheinbeweis dafür, daß keine Eigenspannungen möglich seien, nicht aufgenommen habe. Da ich in erster Linie für Ingenieure schreibe, bei denen ich bisher noch kaum jemals grundsätzlich falsche Anschauungen über die Eigenspannungen bemerkt habe, konnte ich es als entbehrlich ansehen, eine Ansicht ausdrücklich zu widerlegen, die von meinen Lesern auf den ersten Blick als unrichtig erkannt worden wäre.

Da die Eigenspannungen von dem besonderen Vorgange bei der Herstellung durch Gießen, Schmieden, Walzen, Härten, Betonieren (dies namentlich bei der Herstellung des sogenannten armierten Betons) usf. abhängig sind und hierüber in den meisten Fällen aus den besonderen Erfahrungen der mit solchen Arbeiten Beschäftigten nichts zur allgemeinen Kenntnis gekommen ist, muß ich mich hier in der Hauptsache mit einer Erörterung der allgemeinen Eigenschaften des Systems der Eigenspannungen begnügen. Dazu eignen sich besonders die in diesem Abschnitte besprochenen allgemeinen Sätze, so daß ich den Gegenstand an diese unmittelbar angeschlossen habe.

Vor allem gilt für die Eigenspannungen die Gleichung

$$\delta A = 0$$

falls diese im Sinne von Gl. (306) verstanden wird, d. h. wenn das Zeichen δ sich auf eine (mit dem Zusammenhange des Körpers verträgliche) virtuelle Formänderung bezieht. Um dies noch deutlicher hervortreten zu lassen, schreiben wir dafür besser

$$\delta \int \left\{ \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{e^2}{m-2} + \frac{1}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2) \right\} dv = 0. \quad (318)$$

Äußere Kräfte kommen nämlich an dem Körper nicht vor, so daß das sich in Gl. (305) auf sie beziehende Glied fortfällt. Im übrigen aber hat sich gegenüber der Untersuchung, die zu Gl. (305) führte überhaupt nichts geändert.

Anders ist es dagegen mit der Gleichung $\delta A = 0$ im Sinne von Gl. (315), bei der sich das Zeichen δ auf eine Variation des Spannungszustandes bezog. Diese Gleichung verliert bei den Eigenspannungen ihre Gültigkeit. Das folgt daraus, daß bei der Ableitung von Gl. (315) vorausgesetzt wurde, daß sich die Formänderungsgrößen ε_x usf. durch die Differentialquotienten der Verschiebungen $\xi \eta \zeta$ nach den Koordinaten darstellen ließen. Das trifft aber hier nicht zu. Wir sind daher zunächst ausschließlich auf Gl. (318) angewiesen.

Wenn wir freilich willkürlich voraussetzen, der Körper ließe sich durch eine virtuelle Formänderung in einen Zustand bringen, bei dem alle ε und γ gleich Null sind, dann läßt sich aus Gl. (318) der Schluß ziehen, daß dieser Zustand der natürliche Zustand des Körpers ist, d. h. daß keine Eigenspannungen in ihm auftreten können. Das folgt nämlich daraus, daß unter dem Integralzeichen von Gl. (318) eine Summe von Quadraten steht, so daß die Variation des Integrals stets negativ ausfallt, wenn wir von einem durch die Größen ε_x usf. beschriebenen Zustande zu einem den Größen $\alpha\varepsilon_x$, $\alpha\varepsilon_y$ usf. entsprechenden übergehen, worin α einen echten Bruch

bezeichnet. Die Gleichung $\delta A = 0$ kann daher nur erfüllt sein, wenn alle ε und γ Null sind.

Durch diese oder eine ähnliche Schlußweise kann aber natürlich nicht bewiesen werden, daß überhaupt keine Eigenspannungen in einem Körper vorkommen könnten. Denn der Übergang von dem Zustande ε_x usf. zu dem Zustande $\alpha\varepsilon_x$ usf. stellt im allgemeinen keine virtuelle Formänderung dar, d. h. keine Formänderung, die ohne Störung des Körperzusammenhanges möglich wäre. Das trifft nur zu, wenn sich die Größen ε_x usf., die sich auf den Ausgangszustand beziehen, in den Differentialquotienten von drei Funktionen $\xi\eta\zeta$ ausdrücken lassen; im allgemeinen Falle also überhaupt nicht, sondern nur ausnahmsweise.

Um dies zu erkennen, denke man sich den Körper in seine einzelnen Volumenelemente zerschnitten und auseinandergenommen. Dann hört für jedes Volumenelement der Zwang auf, der vorher durch den Zusammenhang mit dem übrigen Körper ausgeübt wurde; es erfährt dann Streckungen in den drei Achsenrichtungen und Winkeländerungen, die ebenso groß aber von entgegengesetzten Vorzeichen sind, wie die in Gl. (318) vorkommenden ε und γ und es wird dadurch in seinen natürlichen Zustand übergeführt. Ausnahmsweise ist es dann möglich, die einzelnen Volumenelemente in diesem Zustande wieder so wie vorher aneinander zu reihen, so daß sie ohne Lücken aufeinander passen. Wenn dies aber möglich ist, so kann man zu dem Endzustande auch dadurch gelangen, daß man vom Ausgangszustande aus jedem Punkte des Körpers eine Verschiebung mit den Komponenten $\xi\eta\zeta$ erteilt, die stetige Funktionen der Koordinaten sind. Im anderen, d. h. im allgemeinen Falle geht dies dagegen nicht.

Durch die vorstehenden Bemerkungen ist zugleich noch genauer definiert, was unter den Formänderungsgrößen ε und γ bei einem Körper, der im natürlichen Zustande mit Eigenspannungen behaftet ist, verstanden werden muß.

Führen wir in Gl. (318) die Variation unter dem Integralzeichen aus, so erhalten wir

$$\int\Big\{2\varepsilon_x\delta\varepsilon_x + 2\varepsilon_y\delta\varepsilon_y + 2\varepsilon_z\delta\varepsilon_z + \frac{2e}{m-2}(\delta\varepsilon_x + \delta\varepsilon_y + \delta\varepsilon_z)$$
$$+ \gamma_{xy}\delta\gamma_{xy} + \gamma_{xz}\delta\gamma_{xz} + \gamma_{yz}\delta\gamma_{yz}\Big\}dv = 0.$$

Darin beschreiben die $\delta\varepsilon_x$ usf. in dem schon oft erörterten Sinne eine „virtuelle“ Formänderung und sie müssen sich daher in den Differentialquotienten von drei Funktionen der Koordinaten, nämlich von $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ ausdrücken lassen, während dies von ε_x usf. nicht gilt. Setzen wir also

$$\delta\varepsilon_x = \frac{\partial\delta\xi}{\partial x}; \quad \delta\varepsilon_y = \frac{\partial\delta\eta}{\partial y}; \quad \delta\varepsilon_z = \frac{\partial\delta\zeta}{\partial z}$$
$$\delta\gamma_{xy} = \frac{\partial\delta\xi}{\partial y} + \frac{\partial\delta\eta}{\partial x}; \quad \delta\gamma_{xz} = \frac{\partial\delta\xi}{\partial z} + \frac{\partial\delta\zeta}{\partial x}; \quad \delta\gamma_{yz} = \frac{\partial\delta\eta}{\partial z} + \frac{\partial\delta\zeta}{\partial y}$$

so geht die vorhergehende Gleichung über in

$$\int\Big\{\Big(2\varepsilon_x + \frac{2e}{m-2}\Big)\frac{\partial\delta\xi}{\partial x} + \Big(2\varepsilon_y + \frac{2e}{m-2}\Big)\frac{\partial\delta\eta}{\partial y} + \Big(2\varepsilon_z + \frac{2e}{m-2}\Big)\frac{\partial\delta\zeta}{\partial z}$$
$$+ \gamma_{xy}\Big(\frac{\partial\delta\xi}{\partial y} + \frac{\partial\delta\eta}{\partial x}\Big) + \gamma_{xz}\Big(\frac{\partial\delta\xi}{\partial z} + \frac{\partial\delta\zeta}{\partial x}\Big)$$
$$+ \gamma_{yz}\Big(\frac{\partial\delta\eta}{\partial z} + \frac{\partial\delta\zeta}{\partial y}\Big)\Big\}dv = 0.$$

Wenn wir die willkürlichen Funktionen $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ weiterhin der Bedingung unterwerfen, daß sie überall an der Körperoberfläche zu Null werden sollen, läßt sich jedes der Glieder, in die sich das Integral zerlegen läßt, durch eine partielle Integration umformen, wie das schon im vorhergehenden mehrmals geschehen war. Man erhält dann z. B.

$$\int\Big(2\varepsilon_x + \frac{2e}{m-2}\Big)\frac{\partial\delta\xi}{\partial x}\,dv = \int\frac{\partial}{\partial x}\Big(2\varepsilon_x + \frac{2e}{m-2}\Big)\delta\xi\,dv$$

usf. Dadurch geht die Gleichung $\delta A = 0$ über in

$$\int\Big\{\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(2\varepsilon_x + \frac{2e}{m-2}\Big) + \frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial z}\Big]\delta\xi + \Big[\cdots\Big]\delta\eta + \Big[\cdots\Big]\delta\zeta\Big\}dv = 0.$$

Damit diese Gleichung für jede Wahl der $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$,

die wir nun noch treffen können, erfüllt sei, müssen an jeder Stelle des Körpers die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon_x + \frac{e}{m-2}\right) + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} = 0 \\ 2\frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon_y + \frac{e}{m-2}\right) + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} = 0 \\ 2\frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon_z + \frac{e}{m-2}\right) + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (319)$$

bestehen. Man hätte diese Gleichungen übrigens auch dadurch erhalten können, daß man in die Gleichgewichtsbedingungen zwischen den Spannungskomponenten mit Hülfe des Elastizitätsgesetzes die Formänderungsgrößen eingeführt hätte. Sie treten an die Stelle der „elastischen Grundgleichungen" für den Fall, daß sich die ε und γ nicht in den Differentialquotienten von $\xi \eta \zeta$ ausdrücken lassen.

Durch die drei Gleichungen (319) sind die sechs unbekannten Funktionen ε und γ natürlich nicht bestimmt. Das liegt in der Natur der Aufgabe, da die Eigenspannungen und die ihnen entsprechenden Formänderungen von den besonderen Bedingungen bei der Bearbeitung des Körpers abhängen. Sie können daher erst ermittelt werden, wenn hierbei nähere Anhaltspunkte vorliegen.

Wir wollen jetzt ferner annehmen, daß ein mit Eigenspannungen behafteter Körper einer Belastung ausgesetzt werde. Dadurch kommen weitere Spannungen hinzu, die zur Unterscheidung von jenen als Lastspannungen bezeichnet werden mögen. Es handelt sich um die Entscheidung der Frage, ob und wie das elastische Verhalten des Körpers gegenüber den Lasten von dem Bestehen der Eigenspannungen abhängig ist.

Diese Frage läßt sich mit Hülfe des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten leicht beantworten. Die durch die Lasten hervorgebrachten Formänderungen seien mit ε_x' usf. bezeichnet, wodurch die gesamte Formänderung gegenüber dem natürlichen Zustande eines aus dem Verbande herausgenommenen einzelnen Volumenelementes auf die durch die Größen $\varepsilon_x + \varepsilon_x'$ usf.

beschriebene ansteigt. Nehmen wir, nachdem der ganze Körper in den neuen Zustand gebracht ist, eine virtuelle Formänderung $\delta \varepsilon_x'$ usf. mit ihm vor, so ist nach der das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten aussprechenden Gleichung (305)

$$\sum \mathfrak{P} \delta \mathfrak{s} - G \delta \int \Big\{ (\varepsilon_x + \varepsilon_x')^2 + (\varepsilon_y + \varepsilon_y')^2 + (\varepsilon_z + \varepsilon_z')^2 + \frac{(e + e')^2}{m - 2} + \frac{1}{2} \Big((\gamma_{xy} + \gamma_{xy}')^2 + (\gamma_{xz} + \gamma_{xz}')^2 + (\gamma_{yz} + \gamma_{yz}')^2 \Big) \Big\} dv = 0.$$

Daraus folgt durch Vornahme der Variation unter dem Integralzeichen unter Beachtung, daß die Variation von $\varepsilon_x + \varepsilon_x'$ einfach $\delta \varepsilon_x'$ ist,

$$\sum \mathfrak{P} \delta \mathfrak{s} - G \int \Big\{ 2(\varepsilon_x + \varepsilon_x') \delta \varepsilon_x' + 2(\varepsilon_y + \varepsilon_y') \delta \varepsilon_y' + 2(\varepsilon_z + \varepsilon_z') \delta \varepsilon_z' + 2(e + e') \frac{\delta e'}{m - 2} + (\gamma_{xy} + \gamma_{xy}') \delta \gamma_{xy}' + (\gamma_{xz} + \gamma_{xz}') \delta \gamma_{xz}' + (\gamma_{yz} + \gamma_{yz}') \delta \gamma_{yz}' \Big\} dv = 0.$$

Wir wissen aber bereits, daß die Summe der Glieder, die sich auf die mit den Eigenspannungen verbundenen Formänderungsgrößen ε_x usf. beziehen, nach Gl. (318) für sich zu Null wird. Daß sie hier mit $\delta \varepsilon_x'$ usf. anstatt mit $\delta \varepsilon_x$ usf. multipliziert sind, macht nämlich nichts aus, da damit jedenfalls, wie die Bezeichnung sonst auch lauten mag, eine willkürliche virtuelle Formänderung gemeint ist. Nach Wegheben dieser Glieder bleibt daher

$$\sum \mathfrak{P} \delta \mathfrak{s} - \int \Big\{ 2 \varepsilon_x' \delta \varepsilon_x' + 2 \varepsilon_y' \delta \varepsilon_y' + 2 \varepsilon_z' \delta \varepsilon_z' + 2 e' \frac{\delta e'}{m - 2} + \gamma_{xy}' \delta \gamma_{xy}' + \gamma_{xz}' \delta \gamma_{xz}' + \gamma_{yz}' \delta \gamma_{yz}' \Big\} dv = 0.$$

Das ist aber genau dieselbe Gleichung, die auch erfüllt sein müßte, wenn in dem Körper gar keine Eigenspannungen vorkämen. Da ferner aus der Gleichung des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten alle übrigen Beziehungen der Elastizitätstheorie abgeleitet werden können, so gelangen wir damit

zu dem bemerkenswerten Satze, daß die Eigenspannungen ohne Einfluß auf das elastische Verhalten des Körpers gegenüber einer Belastung sind.

Dieser Satz gilt unter der Voraussetzung des Hookeschen Elastizitätsgesetzes, d. h. auch bei den Körpern, die dem Hookeschen Gesetze im übrigen gehorchen, nur so lange, als die Proportionalitätsgrenze des Materials nicht überschritten wird. Dagegen wird diese Grenze durch gegebene Lasten um so eher überschritten, je größer die Eigenspannungen sind.

Durch einen Belastungsversuch kann man daher das Bestehen von Eigenspannungen nur dadurch feststellen, daß eine Überschreitung der Elastizitätsgrenze früher eintritt, als wenn sie fehlen.

Wenn man einen Probestab aus einem zähen Metalle in einer Festigkeitsmaschine abreißt und hierauf versucht, die Bruchstücke wieder zusammenzupassen, bemerkt man, daß dies nicht möglich ist. Daraus darf aber nicht der Schluß gezogen werden, daß in dem Probestabe ursprünglich überhaupt Eigenspannungen oder gar von so hohem Betrage, wie sie aus dem sehr mangelhaften Passen der Bruchstücke gefolgert werden könnten, vorhanden gewesen wären. Das ließe sich nur bei einem vollkommen spröden Metalle schließen d. h. dann wenn die Bruchgrenze mit der Elastizitätsgrenze zusammenfiele. Bei dem zähen Metalle beweist das mangelhafte Zusammenpassen der Bruchstücke nur, daß unmittelbar vor dem Bruche Eigenspannungen von großem Betrage vorhanden waren, also Spannungen, die auch weiterhin geblieben wären, wenn man den Versuch unmittelbar vor dem Bruche unterbrochen und den Stab entlastet hätte. Diese Eigenspannungen entstehen aber erst während des Streckens des Stabes unter der Last, das nicht gleichmäßig über den ganzen Querschnitt erfolgt. Läßt man den Stab, nachdem er in diesen Zustand gebracht ist, längere Zeit liegen, so verlieren sich die Eigenspannungen teilweise wieder in Folge von Umlagerungen im molekularen Aufbau des Körpers. Das geht nämlich aus der Erfahrung hervor, daß das elastische Verhalten eines Körpers, der bis

zur Streckgrenze oder darüber hinaus belastet war, verschieden ist, jenachdem man den Körper nach dem ersten Versuche längere oder kürzere Zeit liegen läßt, ehe man ihn von neuem prüft. Diese „Relaxation“, wie man die Erscheinung zuweilen nennt, erstreckt sich über Wochen und bei größeren Stücken selbst über Jahre hinaus. Auf Grund der Formeln der Elastizitätstheorie, die sich auf das Hookesche Gesetz stützen, läßt sie sich natürlich nicht weiter verfolgen.

Eine nicht unwichtige Aufgabe wäre es, die Eigenspannungen zu ermitteln, die in einem gebogenen Stabe zurückbleiben, der eine bleibende Verbiegung erfahren hat. Man könnte ihrer Lösung einerseits auf theoretischem Wege unter Zugrundelegung des für das betreffende Material gültigen Dehnungsdiagramms näher kommen und andererseits auch auf experimentellem Wege, indem man z. B. den Stab in der Mitte vorsichtig zerschneiden und die nach Lösung des Zusammenhangs eintretende Formänderung der Bruchstücke mit Hülfe von Feinmessungen feststellen würde. Nach dieser Richtung hin, wie überhaupt auf dem Gebiete der Eigenspannungen ist bisher noch fast nichts geschehen und junge Ingenieure, die nach dem Thema für eine Doktorarbeit suchen, dürften hier, wie in so manchen anderen Teilen der Festigkeitslehre, die in diesem Bande zur Besprechung gelangten, ein ganz dankbares Arbeitsfeld finden.

§ 47. Gußspannungen in einer Kugel.

Als einfachstes Beispiel für die Anwendung der vorhergehenden Lehren betrachte ich hier einen kugelförmigen Körper, der so hergestellt wurde, daß man eine vollkommene Symmetrie seines Zustandes um den Mittelpunkt herum voraussetzen darf. Das wird man z. B. bei einer gegossenen Kugel genau genug annehmen dürfen, wenn bei der Anordnung der Gußform Rücksicht auf eine möglichst gleichförmige Abkühlung nach allen Seiten hin genommen wurde.

Wegen der vorausgesetzten Symmetrie läßt sich der Spannungszustand nach dem Erkalten, also im natürlichen

Zustande des Körpers durch eine Spannung σ_r in radialer Richtung und eine Spannung σ_t in tangentialer Richtung beschreiben, die nur Funktionen des Abstandes r vom Kugelmittelpunkte sind. Ebenso wird der Formänderungszustand durch zwei Funktionen ε_r und ε_t beschrieben, die mit σ_r und σ_t in dem Zusammenhange

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left(\sigma_r - \frac{2}{m}\sigma_t\right); \qquad \varepsilon_t = \frac{1}{E}\left(\frac{m-1}{m}\sigma_t - \frac{1}{m}\sigma_r\right)$$

stehen. Für die Formänderungsarbeit erhält man nach Gl. (301), indem man für ε_x, ε_y und ε_z die Hauptdehnungen ε_r und ε_t einsetzt, womit die γ zu Null werden, und hierauf die Integration über eine Kugelschale von der Dicke dr ausführt, worauf noch die weitere Integration nach r von 0 bis zum äußeren Kugelhalbmesser a vorzunehmen ist,

$$A = G\int_0^a \left\{\varepsilon_r^2 + 2\varepsilon_t^2 + \frac{1}{m-2}(\varepsilon_r + 2\varepsilon_t)^2\right\} 4\pi r^2 dr. \quad (320)$$

Behufs Anwendung des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten unterwerfen wir den Körper einer virtuellen Verschiebung, bei der sich jeder Punkt im Abstande r vom Mittelpunkte um den willkürlichen unendlich kleinen Betrag $\delta\varrho$ in radialer Richtung verschieben soll; im Mittelpunkte muß natürlich $\delta\varrho$ gleich Null sein, bei $r = a$ braucht es aber nicht zu verschwinden. Damit die Verschiebung als eine „virtuelle" gelten kann, muß übrigens $\delta\varrho$ eine stetige Funktion von r sein. Die Variation von A, die dieser Verschiebung entspricht wird gefunden zu

$$\delta A = G\int_0^a \left\{2\varepsilon_r \frac{d\delta\varrho}{dr} + 4\varepsilon_t \frac{\delta\varrho}{r} + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{m-2}(\varepsilon_r + 2\varepsilon_t)\left(\frac{d\delta\varrho}{dr} + 2\frac{\delta\varrho}{r}\right)\right\} 4\pi r^2 dr.$$

Die Variationen von ε_r und ε_t lassen sich nämlich, wie leicht ersichtlich, so wie angegeben in der virtuellen Verschiebung $\delta\varrho$ ausdrücken. Da keine äußeren Kräfte an dem Körper an-

greifen, muß δA zu Null werden; das liefert die Gleichung

$$\int_0^a \left(\varepsilon_r + \frac{1}{m-2}(\varepsilon_r + 2\varepsilon_t)\right) r^2 \frac{d\delta\varrho}{dr}\, dr +$$

$$+ 2\int_0^a \left(\varepsilon_t + \frac{1}{m-2}(\varepsilon_r + 2\varepsilon_t)\right) r\,\delta\varrho\, dr = 0 .$$

Am ersten Integrale führen wir wieder eine partielle Integration aus. Dadurch geht die Gleichung über in

$$a^2\left[\left(\varepsilon_r + \frac{1}{m-2}(\varepsilon_r + 2\varepsilon_t)\right)\delta\varrho\right]_{r=a} -$$

$$-\int_0^a \delta\varrho \left\{ r^2 \frac{d}{dr}\left(\varepsilon_r + \frac{1}{m-2}(\varepsilon_r + 2\varepsilon_t)\right) + \right.$$

$$+ 2r\left(\varepsilon_r + \frac{1}{m-2}(\varepsilon_r + 2\varepsilon_t)\right) -$$

$$\left. - 2r\left(\varepsilon_t + \frac{1}{m-2}(\varepsilon_r + 2\varepsilon_t)\right)\right\} dr = 0 .$$

Damit diese Gleichung für jedes $\delta\varrho$ erfüllt sein kann, muß zunächst an der Kugeloberfläche

$$\left[\varepsilon_r + \frac{1}{m-2}(\varepsilon_r + 2\varepsilon_t)\right]_{r=a} = 0 \tag{321}$$

sein und außerdem muß an jeder Stelle der als Faktor von $\delta\varrho$ unter dem Integralzeichen in der geschweiften Klammer stehende Wert zu Null werden, also

$$\frac{d}{dr}\left(\varepsilon_r + \frac{1}{m-2}(\varepsilon_r + 2\varepsilon_t)\right) = \frac{2}{r}(\varepsilon_t - \varepsilon_r) \tag{322}$$

sein. Drückt man nachträglich die Dehnungen in den Spannungen aus, so wird

$$\varepsilon_r + \frac{1}{m-2}(\varepsilon_r + 2\varepsilon_t) = \frac{m+1}{mE}\sigma_r$$

$$\varepsilon_t - \varepsilon_r = \frac{m+1}{mE}(\sigma_t - \sigma_r)$$

und die Gleichungen (321) und (322) lassen sich daher auch ersetzen durch

$$[\sigma_r]_{r=a} = 0 \tag{323}$$

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2}{r}(\sigma_t - \sigma_r). \tag{324}$$

Von diesen beiden Gleichungen spricht die erste einfach die Bedingung aus, daß die Oberfläche der Kugel von äußeren Kräften frei sein soll, während sich die zweite auch einfacher aus der Gleichgewichtsbedingung der Spannungen an einem Volumenelement gegen Verschiebung in radialer Richtung ableiten ließe. Unsere Ableitung hat dieser gegenüber nur den Vorzug, daß sie zugleich erkennen läßt, daß aus dem umfassenden Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten auch nichts weiter geschlossen werden kann, als aus der Gleichgewichtsbedingung für jedes Volumenelement.

Wenn σ_r als Funktion von r bekannt wäre, ließe sich nach Gl. (324) auch σ_t sofort angeben; es kommt daher weiterhin nur noch auf σ_r an. Diese Funktion von r, die den Spannungszustand vollständig beschreibt, hängt nun von der Art der Abkühlung des Gußstücks ab. Nehmen wir zunächst an, daß die Abkühlung äußerst langsam erfolge. Dann ist in jedem Augenblicke, da nur eine geringe Wärmeleitung nach außen erfolgt, die Temperatur innerhalb der Kugel an allen Stellen fast genau gleich groß. Wenn der innerste Kern gerade erstarrt, haben auch die äußeren Schichten noch fast genau dieselbe Temperatur. Nun ist gewöhnlich mit dem Erstarren der Metalle eine Vergrößerung des Volumens verbunden. Die äußeren Schichten müssen also während des Erstarrens des Kerns etwas nachgeben, um für diese Volumenvergrößerung Platz zu schaffen. Da aber die äußeren Schichten noch nicht viel unter die Schmelztemperatur abgekühlt sind und die Metalle in der Nähe der Schmelztemperatur schon durch sehr geringe Kräfte deformiert werden können, bringt die Volumenvergrößerung nur unmerkliche Spannungen in den äußeren Schichten hervor. Nachdem die ganze Kugel erstarrt ist, hat man daher nur geringe Spannungen und überall nahezu dieselbe Temperatur. Bei der weiteren Abkühlung zieht sich die ganze Kugel zusammen, woran sie durch nichts gehindert ist, da sich alle

Teile um ungefähr denselben Betrag zusammenziehen. Ein Gußstück, das auf diese Weise hergestellt ist, wird daher auch nach dem Erkalten fast ganz frei von Eigenspannungen sein.

Ganz anders ist es aber, wenn die Abkühlung sehr schnell erfolgt. Wenn die inneren Teile erstarren, haben sich die äußeren Schichten schon erheblich unter die Schmelztemperatur abgekühlt und sie setzen daher der Volumenvergrößerung, die mit dem Erstarren der inneren Teile verbunden ist, einen großen Widerstand entgegen, d. h. sie geraten in einen Spannungszustand, bei dem σ_t positiv, σ_r dagegen negativ ist. Am größten wird die Zugspannung σ_t außen ungefähr in dem Augenblicke, in dem gerade der innerste Kern erstarrt. Späterhin nimmt nämlich σ_t wieder ab, weil der innere Kern sich noch mehr abzukühlen hat und daher mehr zusammenzuziehen sucht als der äußere Teil der Kugel.

Wenn man diesen Vorgang rechnerisch näher verfolgen wollte, müßte man über die elastischen Eigenschaften des Metalls bei hohen Temperaturen bis zur Schmelztemperatur und darüber hinaus und über die mit dem Erstarren verbundenen Vorgänge genau unterrichtet sein. Darüber weiß man aber nur sehr wenig. Eine Untersuchung über die Eigenspannungen muß daher andere Wege einschlagen. Genauen Aufschluß werden darüber nur Experimentaluntersuchungen liefern können, die im einzelnen noch auf verschiedene Art angestellt werden können. Ehe man aber damit beginnen kann, muß man sich auf Grund einfacher Annahmen ein Urteil darüber zu verschaffen suchen, was man etwa zu erwarten hat, weil man hierdurch erst in den Stand gesetzt wird, sich für eine zweckmäßige Versuchsanordnung zu entscheiden.

Jedenfalls haben wir nach den vorhergehenden Betrachtungen zu erwarten, daß die Spannung σ_r, die für $r = a$ zu Null wird, von da aus nach innen hin immer weiter anwächst. Man wird daher zunächst zu versuchen haben, ob man mit der einfachsten Annahme, die hiernach möglich ist, auskommt, nämlich mit dem Ansatze

$$\sigma_r = c(r - a), \tag{325}$$

worin c eine positive Konstante bedeutet, deren Wert hauptsächlich von der mehr oder minder schnellen Abkühlung während des Erstarrens der Kugel abhängt. Wir haben uns vor allem zu fragen, welche Schlüsse sich aus dieser Voraussetzung ziehen lassen. Nach Gl. (324) wird

$$\sigma_t = c\left(\frac{3r}{2} - a\right).$$

Hiernach wird für $r = 0$, wie es sein muß, $\sigma_t = \sigma_r$. An der Stelle $r = \frac{2a}{3}$ wird σ_t zu Null; weiter nach außen hin ist σ_t positiv, d. h. eine Zugspannung und mehr nach innen hin negativ. Ferner lassen sich auch die Dehnungen ε_r und ε_t und die kubische Ausdehnung e als lineare Funktionen von r darstellen. Man erhält

$$\varepsilon_r = \frac{c}{mE}((m-3)r - (m-2)a)$$

$$\varepsilon_t = \frac{c}{mE}\left(\frac{3m-5}{2}r - (m-2)a\right)$$

$$e = \varepsilon_r + 2\varepsilon_t = \frac{m-2}{mE}c(4r - 3a).$$

Integriert man e über das ganze Kugelvolumen, so erhält man

$$\int_0^a 4\pi r^2 e\,dr = 0$$

d. h. bei dem durch Gl. (325) beschriebenen Systeme der Eigenspannungen nimmt die Kugel im ganzen genau dasselbe Volumen ein, als wenn überhaupt keine Eigenspannungen in ihr vorkämen. Die von $r = \frac{3a}{4}$ aus nach innen hin liegenden Teile sind gegenüber dem spannungslosen Zustande zusammengedrückt, die weiter nach außen hin liegenden gedehnt, so daß sich dies im Mittel für die ganze Kugel ausgleicht.

Nun nehme man an, daß die Kugel auf der Drehbank bis zu irgend einem Halbmesser a' abgedreht werde. Die

kleinere Kugel, die man auf diese Weise erhält, ist gegenüber dem Zustande, in dem sie sich vorher als Bestandteil der großen Kugel befand, um die Druckspannungen σ_r, die vorher auf ihrer Oberfläche übertragen wurden, entlastet. Für sich genommen, bringen aber die symmetrisch verteilten Druckspannungen auf der Oberfläche denselben Spannungszustand im Innern hervor, wie er in einer Flüssigkeit besteht. Die Entlastung bewirkt daher, daß nachher alle σ_r und σ_t um den Betrag von σ_r an der Stelle $r = a'$ verändert werden. Bezeichnen wir die jetzt in der kleineren Kugel auftretenden Spannungen mit σ'_r und σ'_t, so haben wir also, wie die Ausführung der Subtraktion lehrt,

$$\sigma'_r = c\,(r - a')$$
$$\sigma'_t = c\left(\frac{3r}{2} - a'\right).$$

Der Spannungszustand in der kleinen Kugel befolgt daher nach der durch das Abdrehen der äußeren Kugelschale bewirkten Entlastung wieder genau dasselbe Gesetz, wie vorher in der größeren Kugel. Insbesondere gilt daher auch für sie wieder derselbe Schluß, daß das Volumen der Kugel im ganzen gerade so groß ist, als wenn keine Eigenspannungen in ihr vorkämen. Vorher war dieses Volumen kleiner, aber infolge der Entlastung nimmt der Durchmesser um so viel zu, daß das durchschnittliche spezifische Gewicht wieder ebenso groß ist, wie vorher. Man erkennt daraus, daß es z. B. nicht möglich ist, durch einen Vergleich der spezifischen Gewichte der durch Abdrehen zu gewinnenden kleineren Kugeln mit dem spezifischen Gewichte der ursprünglichen größeren Kugel einen Nachweis für die Eigenspannungen zu führen.

Da das Abdrehen der Kugel nicht zu dem gewünschten Ziele führen kann, denke man sich jetzt längs eines größten Kreises einen Einschnitt, etwa wiederum bis zur Tiefe $r = a'$ gemacht, was auf einer Drehbank oder mit einer Kaltsäge leicht ausgeführt werden kann. Hierdurch wird das System

der Eigenspannungen geändert. Man kann aber den früheren Zustand dadurch wieder herstellen, daß man an den Schnittflächen überall Kräfte anbringt, die ebenso groß sind, wie die vorher dort übertragenen Spannungen σ_t. Das läßt sich zwar in Wirklichkeit nicht ausführen; aber das ist auch nicht nötig, da es nur darauf ankommt, sich zu überlegen, was für Spannungen eine Belastung dieser Art für sich genommen in dem Körper hervorbringt. Man erkennt, daß dies Zugspannungen σ_t in den zwischen $r = a'$ und $r = a$ liegenden beiden Halbkugelschalen und Druckspannungen σ_r sind, die von außen nach innen hin zunehmen; in dem Kern, d. h. von $r = 0$ bis $r = a$ werden dagegen Spannungen von der Art eines Flüssigkeitsdruckes hervorgerufen. Nimmt man die Lasten wieder weg, so verschwinden auch die zugehörigen Spannungen. Hieraus folgt, daß ein Einschnitt von der bezeichneten Art Formänderungen des Körpers hervorrufen muß, falls Eigenspannungen vorhanden waren. Diese Formänderungen können durch geeignete Feinmeßvorrichtungen nachgewiesen und aus ihnen ein Rückschluß auf den Spannungszustand gezogen werden. Am vorteilhaftesten wird es wohl sein, die Vergrößerung des Durchmessers zu messen, der zu der Ebene des größten Kreises längs dessen der Einschnitt gemacht wurde, senkrecht steht.

Wenn man die ganze Kugel durch eine Durchmesserebene in zwei Halbkugeln zerlegen könnte, ohne dabei Material durch den Drehstahl wegnehmen zu müssen, würden sich die beiden vorher ebenen Schnittflächen krümmen und zwar so, daß sie bei dem Spannungszustande, den wir zu erwarten haben, nach außen hin konvexe Rotationsflächen bilden würden. Dieser Umstand läßt sich aber für eine Experimentaluntersuchung wegen des unvermeidlichen Substanzverlustes nicht wohl verwerten.

Die ganze Betrachtung dieses Paragraphen hat nur den Zweck, mit einer Untersuchung der Eigenspannungen, die praktisch recht wertvolle Ergebnisse zu liefern vermöchte, den Anfang zu machen und den Weg zu zeigen, auf dem man weiter fortzuschreiten haben wird. Ich zweifele keinen Augen-

blick daran, daß man Experimentaluntersuchungen von der hier angegebenen Art in nicht zu ferner Zeit in Angriff nehmen wird und daß unsere bisher so lückenhafte Kenntnis der Eigenspannungen dadurch eine erhebliche Förderung erfahren wird.

Wenn sich dann herausstellen sollte, daß man mit dem einfachen Ansatze in Gl. (325) nicht auskommen kann, würde man für σ_r einen etwas allgemeineren Ausdruck zu bilden haben. Am nächsten würde es dann liegen,

$$\sigma_r = c(r - a) + c_1(r - a)^2$$

zu setzen, womit eine neue Konstante eingeführt wird, durch die man sich den Versuchsergebnissen besser anzuschließen vermöchte. Weitere Schlüsse an diese Gleichung zu knüpfen, wie es im vorhergehenden einfachsten Fall angezeigt erschien, würde aber hier noch verfrüht sein.

Die Kugel ist freilich eine Körperform, die bei den technischen Anwendungen verhältnismäßig selten vorkommt. Ihrer Einfachheit wegen eignet sie sich aber am besten, um die Erscheinungen, die hier in Frage kommen, zunächst einmal etwas eingehender zu erforschen. Wenn dies erst geschehen ist, wird es nicht schwer fallen, auch für andere Körperformen, die für die Praxis wichtiger sind, passende Ansätze für die Eigenspannungen ausfindig zu machen.

Sechster Abschnitt.

Verschiedene Anwendungen.

§ 48. Die Theorie der Härte von Hertz.

Über diesen praktisch sehr wichtigen Gegenstand habe ich schon im dritten Bande (§ 75 der dritten Aufl.) eine kurze Übersicht gegeben und zwar habe ich nicht nur die Hauptformeln, wenn auch ohne Beweis, angeführt, sondern auch schon darauf hingewiesen, daß bei der Hertzschen Theorie keine Rücksicht auf das verschiedene elastische Verhalten der Oberflächenschichten gegenüber den mehr nach innen hin liegenden Teilen des Körpers genommen ist. Hierdurch werden gewisse Abweichungen zwischen den Schlußfolgerungen der Theorie und den Beobachtungstatsachen herbeigeführt. Dieser Mangel ist aber doch nicht sehr erheblich und er verhindert nicht, daß die Hertzsche Theorie ein im allgemeinen ganz gut zutreffendes Bild von dem Verhalten der elastischen Körper gibt, die anfänglich in geometrischer Berührung standen und dann durch einen Druck aufeinander gepreßt und dadurch abgeplattet wurden.

Durch die kurze Wiedergabe der Hertzschen Formeln in der ersten Auflage des dritten Bandes meiner Vorlesungen, die vor zehn Jahren erschien, wurden diese Formeln wohl zuerst in weiteren Kreisen der Technik bekannt gemacht. Sie haben sich seitdem, wie es scheint, schon recht gut eingeführt und werden vielfach angewendet. Selbst ein elementares Buch wird in Zukunft kaum achtlos an ihnen vorübergehen können, wenn es sich freilich auch auf die bloße Wiedergabe der Er-

gebnisse der Hertzschen Theorie beschränken muß, da an eine elementare Wiedergabe der Beweisführung nicht zu denken ist. Auch dem dritten Bande meiner Vorlesungen konnte ich eine eingehende Besprechung der Hertzschen Theorie ohne eine Überschreitung des dort innezuhaltenden Rahmens nicht aufbürden. Umsomehr ist es aber nötig, daß dies hier nachgeholt wird, denn es bleibt immer eine mißliche Sache für den denkenden Ingenieur, wenn er sich auf die Richtigkeit von Formeln verlassen soll, die ihm ohne Beweis angegeben werden und die er nicht selbst nachzuprüfen vermag. Erst wer die Grundlagen genau erkannt hat, auf denen die Formeln errichtet sind, vermag sich ihrer mit Zuversicht zu bedienen, die Grenzen zu erkennen, die ihrer Anwendung gesteckt sind und selbst unter Umständen über diese Grenzen hinaus wenigstens eine zutreffende Abschätzung vorzunehmen.

Bisher war man, um sich eine solche genauere Einsicht zu verschaffen, auf das Studium der beiden Hertzschen Abhandlungen angewiesen, die diesen Gegenstand behandeln und in den „Gesammelten Werken" zu finden sind. Die meisten, die sich dazu entschlossen haben, werden aber wohl das Hertzsche Buch enttäuscht wieder aus der Hand gelegt haben. Diese Abhandlungen sind nämlich in der Tat sehr schwer verständlich, indem Hertz nur die Grundzüge der Beweisführung angibt und von seinen Lesern erwartet, daß sie sich das übrige selbst zurechtlegen. Insbesondere vermag man Hertz nicht zu folgen, wenn man nicht vorher schon mit der Formel für das Potential eines dreiachsigen Ellipsoids wohl vertraut ist, da die ganze Betrachtung darauf gestützt ist. Von einem Ingenieur kann man aber natürlich nicht erwarten, daß er eigens zu diesem Zwecke die Potentialtheorie des Ellipsoids studiert, von der er sonst kaum einen Gebrauch zu machen wüßte.

Ich hoffe nun, durch die nachfolgende Darstellung diesem Mangel abzuhelfen und dem Ingenieur ein genaues Verständnis der Hertzschen Theorie verschaffen zu können und zwar, wie überhaupt in diesem ganzen Werke, ausschließlich auf

Grundlage solcher mathematischer Kenntnisse, wie sie bei jedem tüchtigen und mathematisch hinreichend begabten Absolventen einer technischen Hochschule vorausgesetzt werden dürfen.

Freilich werde ich mich aus Zweckmäßigkeitsgründen darauf beschränken, die Betrachtung nur für den einfachsten, aber zugleich praktisch wichtigsten Fall der kreisförmigen Druckflächen vollständig durchzuführen. Aber man wird, wenn man sich damit vertraut gemacht hat, zugleich auch sehen, wie man zu verfahren hat, um die Betrachtung in derselben Weise auf den allgemeinen Fall elliptischer Druckflächen zu übertragen. Diese Ausdehnung erfordert nur einen größeren Aufwand an Rechnungen, bietet aber keine grundsätzlichen Schwierigkeiten mehr, nachdem die Betrachtung für die kreisförmigen Druckflächen durchgeführt ist.

Zunächst knüpfe ich an § 37 an, in dem die einfache Laplacesche Differentialgleichung abgeleitet ist, der das Potential V einer Massenverteilung überall außerhalb der anziehenden oder abstoßenden Massen genügt. Diese Gleichung lautet

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Setzt man nun die elastischen Verschiebungen $\xi \eta \zeta$ in einem Körper

$$\xi = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \zeta = \frac{\partial V}{\partial z},$$

so genügen diese Werte den elastischen Grundgleichungen, stellen also ein mögliches System von Verschiebungen dar, falls die Massen, von denen das Potential V herrührt, außerhalb des betrachteten Körpers liegen und keine äußeren Massenkräfte XYZ an den Volumenelementen des Körpers angreifen. Um dies zu beweisen, bilde man zunächst die kubische Ausdehnung e

$$e = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \nabla^2 V = 0.$$

Ferner wird auch

$$\nabla^2 \xi = \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 V = 0.$$

Die elastischen Grundgleichungen, von denen die erste für den hier in Betracht gezogenen Fall, daß keine äußeren Massenkräfte an den Volumenelementen zu berücksichtigen sind,

$$\nabla^2 \xi + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial x} = 0$$

lautet, sind daher in der Tat durch den gewählten Ansatz erfüllt. Man könnte daher durch passende Wahl der äußeren Kräfte an den Körperoberflächen erreichen, daß die durch $\xi \eta \zeta$ beschriebene Formänderung auch tatsächlich eintritt.

Freilich handelt es sich dabei bis jetzt nur um den sehr eng beschränkten Fall einer möglichen Beanspruchung des Körpers, in dem der, mit dem wir es hier zu tun haben, nicht einbegriffen ist. Aber man kann von dem einfachen Ansatze, den wir zum Ausgangspunkte gewählt haben, nun leicht auch, wie es schon im § 37 geschehen war, zu verwandten Ansätzen gelangen, die allgemeiner sind und unter denen sich auch jener befindet, der der Hertzschen Theorie der Härte zu Grunde liegt. Man setze nämlich zu diesem Zwecke

$$\left.\begin{aligned} \xi &= az\frac{\partial V}{\partial x} + b\int_z^\infty \frac{\partial V}{\partial x} dz \\ \eta &= az\frac{\partial V}{\partial y} + b\int_z^\infty \frac{\partial V}{\partial y} dz \\ \zeta &= az\frac{\partial V}{\partial z} + cV \end{aligned}\right\} \qquad (326)$$

wobei a, b und c Konstanten sind, die später noch ihre passende Bestimmung finden sollen. Dann läßt sich leicht nachweisen, daß auch diese Werte von $\xi \eta \zeta$ den elastischen Grundgleichungen genügen. Dazu bilde man die kubische Ausdehnung e, wofür man durch Ausführung der Differentialquotienten und mit Weglassung von drei Gliedern, die sich nach der Laplaceschen Gleichung gegeneinander fortheben,

$$e = b\int_z^\infty \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) dz + (a + c)\frac{\partial V}{\partial z}$$

erhält. Ferner hat man aber, ebenfalls nach der Laplaceschen Gleichung

$$\int_z^\infty \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) dz = -\int_z^\infty \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} dz = \frac{\partial V}{\partial z},$$

da nämlich für $z = \infty$ das Potential V der Massen, die ausschließlich im Endlichen liegen sollen, sowie seine Differentialquotienten und zwar diese so wie $\frac{1}{z^2}$ gegen Null konvergieren. Aus dieser Bemerkung geht übrigens auch hervor, daß erstens die in den Gl. (326) vorkommenden Integrale, die sich bis ins Unendliche erstrecken, doch nur einen endlichen Wert haben und daß zweitens in unendlicher Entfernung trotz des Faktors z im ersten Gliede $\xi\eta\zeta$ zu Null werden. Für e erhält man nun

$$e = (a + b + c)\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Hierauf führen wir an dem Werte von ξ in der ersten der Gl. (326) die Laplacesche Operation ∇^2 aus. Lassen wir auch hier wieder drei Glieder fort, die sich nach der Laplaceschen Gleichung, der V genügt, gegeneinander wegheben, so wird

$$\nabla^2\xi = b\int_z^\infty \left(\frac{\partial^3 V}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 V}{\partial x \partial y^2}\right) dz + (2a - b)\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}$$

und indem wir das Integral in derselben Weise umformen wie vorher, erhalten wir

$$\nabla^2\xi = 2a\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}.$$

Wenn wir die Werte von $\nabla^2\xi$ und e in die erste Grundgleichung einsetzen, finden wir, daß diese befriedigt ist, falls zwischen den Konstanten a, b, c die Bedingung

$$2a + \frac{m}{m-2}(a + b + c) = 0 \tag{327}$$

besteht. Daß damit auch die zweite Grundgleichung erfüllt wird, folgt daraus, daß in unserem Ansatze x und y vollkommen symmetrisch vorkommen. Um den Nachweis auch für die dritte Grundgleichung zu führen, bilden wir $\nabla^2 \zeta$ und erhalten dafür nach einfacher Ausrechnung, wieder unter Berücksichtigung der Gleichung $\nabla^2 V = 0$,

$$\nabla^2 \zeta = 2a \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Die dritte Grundgleichung, nämlich

$$\nabla^2 \zeta + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial x} = 0$$

ist daher ebenfalls erfüllt, wenn die Konstanten a, b, c so gewählt werden, wie es Gl. (327) verlangt.

Hiermit ist zunächst der Nachweis erbracht, daß die Verschiebungswerte in den Gl. (326) eine Lösung des Elastizitätsproblems darstellen, falls nur die Bedingungen an den Grenzflächen des Körpers so gewählt werden, wie sie dieser Lösung entsprechen. Um dies zu untersuchen, bilden wir die Spannungskomponenten, die diesem Formänderungszustande entsprechen. Nach den Gl. (27) und (28) erhält man dafür

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= 2G\left(az\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + b\int_z^\infty \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,dz + \frac{a+b+c}{m-2}\frac{\partial V}{\partial z}\right)\\
\sigma_y &= 2G\left(az\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + b\int_z^\infty \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\,dz + \frac{a+b+c}{m-2}\frac{\partial V}{\partial z}\right)\\
\sigma_z &= 2G\left(az\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \left(a + c + \frac{a+b+c}{m-2}\right)\frac{\partial V}{\partial z}\right)\\
\tau_{xy} &= 2G\left(az\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} + b\int_z^\infty \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\,dz\right)\\
\tau_{xz} &= G\left(2az\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z} + (a-b+c)\frac{\partial V}{\partial x}\right)\\
\tau_{yz} &= G\left(2az\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z} + (a-b+c)\frac{\partial V}{\partial y}\right)
\end{aligned}\right\}. \qquad (328)$$

Bis dahin war es gleichgültig, wo die Massen lagen, von denen das Potential V herrührt; nur innerhalb des Körpers,

auf den sich unsere Lösung bezieht, durfte keine dieser Massen enthalten sein. Von jetzt ab wollen wir aber, um unserem Ziele näher zu kommen, annehmen, daß die Massen ausschließlich auf einer kleinen um den Koordinatenursprung herum liegenden Fläche auf der XY-Ebene ausgebreitet seien. In einem Abstande, der groß ist gegenüber den Abmessungen dieser Fläche, kann man dann, wenn die Summe der Massen mit M bezeichnet wird,

$$V = \frac{M}{r} \quad \text{mit } r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

setzen. Hiermit lassen sich für alle Stellen, die in größeren Abständen vom Koordinatenursprunge liegen, die Spannungs-Komponenten nach den Gleichungen (328) weiter ausrechnen. Man hat nämlich z. B.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{Mx}{r^3} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{M}{r^3} + \frac{3Mx^2}{r^5}$$

und um die Integrale in den Gleichungen (328) zu berechnen, setze man

$$\int_z^\infty \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_z^\infty \frac{\partial V}{\partial x} dz = -\frac{\partial}{\partial x}\left\{ Mx \int_z^\infty \frac{dz}{r^3} \right\}.$$

Die zuletzt noch vorkommende Integration läßt sich aber sofort ausführen, denn für das unbestimmte Integral hat man

$$\int \frac{dz}{r^3} = -\frac{1}{r(r+z)}$$

wie die Ausführung der Differentiation nach z erkennen läßt, daher für das bestimmte Integral

$$\int_z^\infty \frac{dz}{r^3} = \frac{1}{r(r+z)}$$

und hiermit findet man

$$\int_z^\infty \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dz = -\frac{\partial}{\partial x}\left(M \frac{x}{r(r+z)} \right) = -M\left(\frac{1}{r(r+z)} - \frac{(2r+z)x^2}{r^3(r+z)^2} \right).$$

In derselben Weise lassen sich auch die anderen in den Gl. (328) vorkommenden Integrale entwickeln.

Für einen in der XY-Ebene liegenden Punkt, der außerhalb der um den Ursprung herum verteilten Massen liegt, fällt die anziehende oder abstoßende Kraft, die von diesen Massen herrührt, in die XY-Ebene; daher ist für ihn

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{z=0} = 0.$$

Daraus folgt, daß für ein in der XY-Ebene liegendes Flächenelement, das weit genug vom Koordinatenursprunge entfernt ist, σ_z nach den Gl. (328) zu Null wird. Durch eine passende Verfügung über die Konstanten können wir aber auch erreichen, daß in einem solchen Flächenelemente überhaupt keine Spannungen übertragen werden. Denn die beiden übrigen Spannungskomponenten τ_{zx} und τ_{zy}, werden nach den Gleichungen (328) für $z = 0$ überall zu Null, wenn wir

$$a - b + c = 0 \tag{329}$$

setzen. Wir können uns daher den Körper, über dessen Begrenzung bisher nichts festgesetzt war, weiterhin durch die XY-Ebene begrenzt denken und wir erreichen damit, daß diese Grenzfläche überall frei von äußeren Kräften ist, mit Ausnahme der um den Koordinatenursprung herum liegenden kleinen Fläche, der sogenannten Druckfläche, über die wir uns die Massen M verteilt dachten. In dieser Druckfläche sind zwar die Spannungskomponenten τ_{zx} und τ_{zy} immer noch gleich Null; dagegen ist σ_z von Null verschieden, da $\frac{\partial V}{\partial z}$ innerhalb dieses Bezirkes für $z = 0$ nicht verschwindet.

Drücken wir mit Hülfe der Gleichungen (327) und (329) b und c in a aus, so erhalten wir

$$b = -a\frac{m-2}{m}, \quad c = -a\frac{2m-2}{m}$$

und wenn wir diese Werte in die Gleichungen (328) einsetzen, gehen sie über in

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= 2aG\left(z\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{m-2}{m}\int\limits_z^\infty \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}dz - \frac{2}{m}\frac{\partial V}{\partial z}\right)\\
\sigma_y &= 2aG\left(z\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{m-2}{m}\int\limits_z^\infty \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}dz - \frac{2}{m}\frac{\partial V}{\partial z}\right)\\
\sigma_z &= 2aG\left(z\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{\partial V}{\partial z}\right)\\
\tau_{xy} &= 2aG\left(z\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{m-2}{m}\int\limits_z^\infty \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}dz\right)\\
\tau_{xz} &= 2aGz\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}\\
\tau_{yz} &= 2aGz\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}
\end{aligned}\right\}. \qquad (330)$$

Für die Stellen, die hinreichend weit vom Koordinatenursprunge, d. h. von der Druckfläche entfernt sind, lassen sich diese Formeln nach der vorher vorgenommenen Berechnung der Differentialquotienten von V und ihrer Integrale noch weiter ausrechnen. Offenbar ist in größeren Abständen vom Ursprunge der Spannungszustand rings um die Z-Achse symmetrisch verteilt, da dort auch die Niveauflächen des Potentials V Umdrehungsflächen mit der Z-Achse als Symmetrieachse sind. Es genügt daher, wenn wir die Spannungskomponenten für jeden in der XZ- (oder auch in der YZ-)Ebene liegenden Punkt anzugeben vermögen. Für $y = 0$ findet man auf dem angegebenen Wege nach einigen algebraischen Umformungen zur Vereinfachung der Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= 2aGM\left(\frac{3zx^2}{r^5} - \frac{m-2}{m}\cdot\frac{1}{r(r+z)}\right)\\
\sigma_y &= 2aGM\frac{m-2}{m}\left(-\frac{z}{r^3} + \frac{1}{r(r+z)}\right)\\
\sigma_z &= 6aGM\frac{z^3}{r^5}\\
\tau_{xy} &= 0\\
\tau_{xz} &= 6aGM\frac{xz^2}{r^5}\\
\tau_{yz} &= 0
\end{aligned}\right\}. \qquad (331)$$

Ein Vergleich dieser Formeln mit den Gl (271) in § 38 lehrt, daß beide, abgesehen von der abweichenden Bezeichnung vollständig miteinander übereinstimmen, falls man die hier vorkommenden Konstanten a und M so wählt, daß $a\dot{M} = -c$ wird. Die Hertzsche Theorie umfaßt daher, wie sich erwarten ließ, zugleich die in § 38 wiedergegebene Theorie von Boussinesq; sie unterscheidet sich von dieser nur dadurch, daß sie das Hauptgewicht auf die Ermittelung der Spannungen in der Nähe der Druckfläche legt, worauf in der früheren Untersuchung verzichtet war. Zu diesem Zweck müssen wir auf die Gl. (330) zurückgehen, da die Gleichungen (331) in der Nähe der Druckfläche nicht mehr gültig sind.

Vor allem müssen wir uns überlegen, welchen Wert $\frac{\partial V}{\partial z}$ für einen Punkt annimmt, der sich in einem sehr kleinen Abstande von der Druckfläche befindet. Wir wollen uns diesen Abstand so klein denken, daß ihm gegenüber die Abmessungen der Druckfläche sehr groß sind. Da nun $\frac{\partial V}{\partial z}$ die Z-Komponente der von den Massen ausgeübten Kräfte angibt, die mit dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional sind, erkennt man, daß $\frac{\partial V}{\partial z}$ in solch kleinen Abständen nur von der Flächendichte der Massenbelegung in der unmittelbaren Nachbarschaft abhängt. Die Kraft ist daher ebensogroß, als wenn die ganze XY-Ebene mit Massen von derselben Flächendichte μ belegt wäre, die an der dem Punkte gerade gegenüberliegenden Stelle der Druckfläche besteht. Diese Kraft läßt sich aber durch eine einfache Integration berechnen. In Abbildung 32 sei A der Punkt, dessen Abstand z von der XY-Ebene als sehr klein zu betrachten ist. Vom Fußpunkte von z denken wir uns zwei Kreise mit den

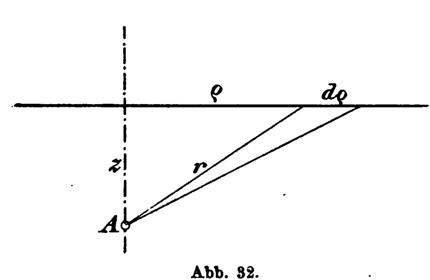


Abb. 32.

Radien ϱ und $\varrho + d\varrho$ in der XY-Ebene gezogen. Zwischen beiden Kreisen liegt die Masse $2\pi\varrho d\varrho\mu$, die zu der an A angreifenden Kraft den Beitrag

$$2\pi\varrho d\varrho\mu \cdot \frac{z}{r^3}$$

liefert. Die ganze Kraft finden wir daraus durch Integration von $\varrho = 0$ bis $\varrho = \infty$, also gleich

$$2\pi\mu z \int_0^\infty \frac{\varrho d\varrho}{r^3}.$$

Da nun $r^2 = z^2 + \varrho^2$ und daher $\varrho d\varrho = r dr$ ist, folgt

$$\int_0^\infty \frac{\varrho d\varrho}{r^3} = \frac{1}{z}.$$

Für sehr kleine Abstände z können wir daher

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2\pi\mu \tag{332}$$

setzen. Über das Vorzeichen der Kraft war vorher nichts ausgemacht, da dahingestellt blieb, ob es sich um anziehende oder abstoßende Massen handeln sollte. Das Minuszeichen auf der rechten Seite der vorhergehenden Gleichung war aber deshalb beizufügen, weil wir in großen Abständen z bereits $\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{Mz}{r^3}$ gesetzt hatten und in beiden Fällen sowohl M und μ, als auch z dasselbe Vorzeichen haben und ebenso auch die Kraftkomponente $\frac{\partial V}{\partial z}$. Beachtenswert ist, daß in diesen kleinen Abständen $\frac{\partial V}{\partial z}$ von z unabhängig ist. An der Stelle $z = 0$ selbst erfährt $\frac{\partial V}{\partial z}$ eine sprungweise Änderung, da sich auf der andern Seite der Fläche die Richtung der Kraft umkehrt. Wir können nun auch den auf die Druckfläche selbst als äußere Kraft einwirkenden Normaldruck σ_z angeben und finden dafür nach den Gl. (330)

$$(\sigma_z)_{z=0} = 4\pi a G\mu. \tag{333}$$

Da dies eine Druckspannung sein soll, müssen wir der Konstanten a einen negativen Wert geben, wenn μ als positiv angesehen werden soll. Bezeichnen wir die gesamte Druckkraft, die in der Druckfläche übertragen wird, mit P, so haben wir bei Integration über die Druckfläche

$$P = -\int \sigma_z dF = -4\pi a G \int \mu dF = -4\pi a G M \qquad (334)$$

womit (in Übereinstimmung mit Gl. (272)) die Konstante aM in P ausgedrückt werden kann.

§ 49. Fortsetzung; die Grenzbedingungen an der Druckfläche.

Wir denken uns die beiden Körper, die gegeneinander gedrückt werden sollen, zunächst ohne Druck zur Berührung gebracht. Den Berührungspunkt nehmen wir als den Ursprung des im vorigen Paragraphen gewählten Koordinatensystems an und die in das Innere des einen dieser Körper, den wir als den ersten bezeichnen wollen, gezogene Normale als die Z-Achse dieses Koordinatensystems. Die Gleichung der Oberfläche des ersten Körpers in der Form $z = f(xy)$ können wir uns nach Potenzen von x und y entwickelt denken, wobei es für alle Punkte, die dem Ursprunge sehr nahe liegen (da wir von singulären Punkten, wie Spitzen u. dgl. absehen wollen) zulässig erscheint, alle höheren Potenzen der sehr kleinen Größen x und y gegenüber den zweiten zu vernachlässigen. Die ersten Potenzen von x und y können in dieser Entwickelung nicht vorkommen, weil die XY-Ebene die Oberfläche im Ursprunge berührt. Die Gleichung der Oberfläche lautet daher in der Nachbarschaft des Ursprungs

$$z_1 = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 xy + \alpha_3 y^2$$

womit nur ausgesprochen ist, daß man sich die Fläche innerhalb eines kleinen Bezirks durch eine Fläche zweiter Ordnung ersetzt denken kann. Denkt man sich in derselben Weise auch noch ein Koordinatensystem gegen den zweiten Körper fest-

gelegt, das sich von dem vorigen nur durch die entgegengesetzte Richtung der Z-Achse unterscheidet, so hat man für die Oberfläche dieses Körpers in der Nähe des Ursprungs die Gleichung

$$z_2 = \beta_1 x^2 + \beta_2 xy + \beta_3 y^2$$

und hiernach ist der in der Richtung der Z-Achsen gemessene Abstand beider Oberflächen an der Stelle x, y

$$z_1 + z_2 = (\alpha_1 + \beta_1)x^2 + (\alpha_2 + \beta_2)xy + (\alpha_3 + \beta_3)y^2.$$

Bisher war über die Richtungen der X- und Y-Achse in der Berührungsebene nichts ausgemacht. Wir können uns diese, wie aus den einfachen Formeln über die Koordinatentransformation in der Ebene hervorgeht, aber nachträglich jedenfalls so gedreht denken, daß nachher das Glied mit xy in der vorigen Formel verschwindet, so daß bei dieser besonderen Wahl der Koordinatenrichtungen

$$z_1 + z_2 = \gamma_1 x^2 + \gamma_2 y^2 \tag{335}$$

wird. Die hierin vorkommenden Konstanten γ_1 und γ_2 lassen sich in den Hauptkrümmungsradien der beiden Oberflächen am Berührungspunkte ausdrücken, worauf es aber einstweilen nicht ankommt. Setzt man

$$\gamma_1 x^2 + \gamma_2 y^2 = C,$$

worin C eine Konstante von kleinem Betrage ist, so hat man damit die Gleichung einer Kurve in der XY-Ebene, für deren Punkte der zugehörige Abstand der beiden Oberflächen von einander überall denselben Wert hat. Die Kurve ist von der zweiten Ordnung und in den Fällen, die praktisch in Frage kommen können, eine Ellipse oder ein Kreis. Die Hauptachsen der Ellipse fallen in die Koordinatenachsen, und ihr Mittelpunkt in den Ursprung. Ferner sind alle Ellipsen, die man für verschiedene Werte von C erhält, wie ebenfalls aus der Gleichung hervorgeht, untereinander ähnlich und natürlich auch ähnlich gelegen. Insbesondere sind sie alle Kreise, wenn eine von ihnen ein Kreis ist, nämlich dann, wenn $\gamma_1 = \gamma_2$ ist.

Nun denke man sich die beiden Körper mit der Kraft P gegeneinander gedrückt. Dabei werden sie sich abplatten und

in der Druckfläche zur Berührung kommen. Die Abplattung soll aber jedenfalls sehr klein sein gegenüber den Hauptkrümmungsradien beider Oberflächen vor der Formänderung, so daß innerhalb der Druckfläche die vorhergehenden Betrachtungen als gültig angesehen werden können. Der Abstand $z_1 + z_2$ ist jetzt innerhalb der Druckfläche durch die Zusammendrückung beider Körper verschwunden und wir haben hier

$$\zeta_1 + \zeta_2 + z_1 + z_2 = \alpha \tag{336}$$

wobei mit α die gesamte Abplattung, d. h. die Annäherung bezeichnet ist, die die weiter vom Ursprunge gelegenen Teile beider Körper gegeneinander erfahren haben. Unter ζ_1 und ζ_2 sind die in der Richtung der Z_1- oder Z_2-Achse genommenen elastischen Verschiebungen der Oberflächenpunkte zu verstehen. Wir können dafür die im vorigen Paragraphen abgeleitete Formel benutzen. Obschon diese zunächst unter der Voraussetzung gefunden war, daß der Körper in der Nähe der Druckfläche vor der Formänderung durch eine Ebene, nämlich die XY-Ebene begrenzt gewesen sei, dürfen wir sie doch unbedenklich auch auf den hier vorliegenden Fall übertragen, weil wir die Abplattung ausdrücklich als so klein vorausgesetzt haben, daß die Hauptkrümmungsradien der Körperoberfläche vor der Formänderung als sehr groß gegenüber den Abmessungen der Druckfläche angesehen werden können. Bei größeren Abplattungen freilich würde die früher für ζ aufgestellte Formel nicht mehr benutzt werden dürfen, woraus sich schon eine Gültigkeitsgrenze der ganzen Theorie ergibt. In unserem Falle aber geht Gl. (336) unter Berücksichtigung der letzten der Gleichungen (326) für $z = 0$ über in

$$(c_1 + c_2)\, V + z_1 + z_2 = \alpha.$$

Unter c_1 oder c_2 ist die im vorigen Paragraphen eingeführte Konstante c, bezogen auf den ersten oder zweiten Körper zu verstehen. Eine Unterscheidung zwischen V_1 und V_2 für die beiden Körper brauchen wir dagegen nicht zu machen, da wir uns die Massenverteilung in der XY-Ebene,

von der das Potential V herrührt, für beide Körper übereinstimmend angenommen denken.

Das ist schon deshalb nötig, weil der in der Druckfläche übertragene Normaldruck σ_z nach Gl. (333) mit μ proportional ist und nach dem Wechselwirkungsgesetze an jeder Stelle für beide Körper denselben Wert haben muß. Damit diese Bedingung erfüllt sei, muß außerdem nach Gl. (333) zwischen den auf beide Körper bezogenen Konstanten die Beziehung

$$a_1 G_1 = a_2 G_2 \tag{337}$$

bestehen. Ersetzen wir ferner auch in der vorhergehenden Gleichung die Konstanten c_1 und c_2 nach den früher dafür aufgestellten Beziehungen durch die Konstanten a_1 und a_2 und führen für $z_1 + z_2$ den sich aus Gl. (335) ergebenden Wert ein, so erhalten wir

$$-2\left(a_1 \frac{m_1 - 1}{m_1} + a_2 \frac{m_2 - 1}{m_2}\right) V + \gamma_1 x^2 + \gamma_2 y^2 = \alpha.$$

Aus dieser Gleichung finden wir die bis dahin unbekannt gebliebene Funktion V für alle Punkte innerhalb der Druckfläche zu

$$V = \frac{\gamma_1 x^2 + \gamma_2 y^2 - \alpha}{2\left(a_1 \frac{m_1 - 1}{m_1} + a_2 \frac{m_2 - 1}{m_2}\right)}. \tag{338}$$

Durch das Potential ist aber auch die dazu gehörige Massenverteilung μ auf der Druckfläche eindeutig bestimmt und unsere nächste Aufgabe besteht darin, das zugehörige μ ebenfalls als Funktion von x und y darzustellen. Hertz hat diese Beziehung einfach aus der einen Hauptbestandteil der Potentialtheorie bildenden Formel für das Potential eines gleichmäßig mit Masse angefüllten dreiachsigen Ellipsoids entnommen, das er sich soweit zusammengedrückt dachte, daß es in eine ebene Scheibe von elliptischer Gestalt überging. Man kann diese Betrachtung aber auch durch eine einfachere ersetzen, die ich im nächsten Paragraphen anstellen werde.

§ 50. **Fortsetzung; Hülfsbetrachtung aus der Potentialtheorie.**

In Abb. 33 bedeute P eine beliebig begrenzte ebene Fläche, die wir uns nach irgend einem Gesetz mit Massen μ belegt denken. Wir können uns die Massenverteilung durch eine krumme Fläche veranschaulichen, die über P errichtet ist, so daß die senkrecht zur Zeichenebene gezogene Ordinate der Fläche mit μ proportional ist. Zieht man irgend eine Linie AB, die die Fläche P durchschneidet, so kann man die Massenverteilung längs AB auch dadurch darstellen, daß man die Schnittfigur, die eine über AB senkrecht zur Zeichenebene errichtete Ebene mit der vorerwähnten krummen Fläche bildet, in die Zeichenebene umklappt. In Abb. 33 soll die punktierte Linie Q diese umgeklappte Schnittfigur angeben.

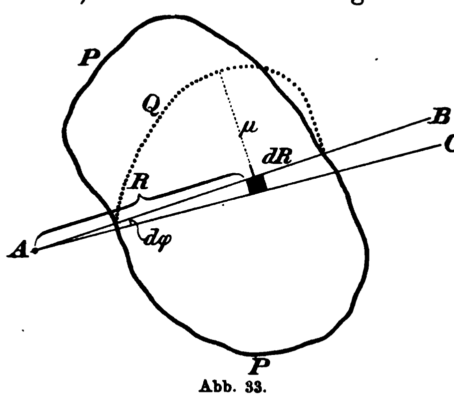


Abb. 33.

Von A aus ziehen wir außer der Linie AB noch eine zweite AC, die einen unendlich kleinen Winkel $d\varphi$ mit ihr einschließt. Aus dem dadurch gebildeten Sektor schneiden wir durch zwei Kreisbogenelemente mit den Radien R und $R + dR$ ein Flächenelement aus, auf dem sich die Masse $\mu R d\varphi dR$ befindet. Der Beitrag, den diese Masse zu dem Potentiale V im Punkte A liefert, wird daraus durch Division mit R, also gleich $\mu d\varphi dR$ gefunden. Daraus folgt der Beitrag dV, den alle zwischen AB und AC liegenden Massen zu V liefern, zu

$$dV = d\varphi \int \mu dR,$$

wobei sich die Integration über alle Längenelemente dR zu er-

strecken hat, für die μ von Null verschieden ist. Das Integral hat aber eine einfache Bedeutung; abgesehen von einem Proportionalitätsfaktor, der bei der Darstellung von μ durch eine Länge auftritt, ist es gleich dem Inhalte der vorher erwähnten Schnittfigur Q. Bezeichnen wir deren Inhalt mit F und den Proportionalitätsfaktor, der den Maßstab der Darstellung bestimmt, mit c, so wird

$$dV = cFd\varphi$$

und das Potential aller Massen im Punkte A wird daraus durch Integration nach φ zu

$$V = c\int Fd\varphi \tag{339}$$

gefunden. Die Integration muß sich über alle Winkelelemente $d\varphi$ erstrecken, durch die die Fläche von A aus überstrichen wird.

In Abb. 33 war zunächst der Einfachheit wegen angenommen, daß der Punkt A außerhalb der Massenverteilung liege. Man überzeugt sich aber nachträglich leicht, daß Gl. (339) auch dann gilt, wenn A, wie in Abb. 34 im Innern der Massenverteilung liegt. Man muß dann nur alle Massen zur Bildung von dV zusammenfassen, die zwischen AB und AC sowohl, als zwischen ihren rückwärtigen Verlängerungen enthalten sind. Die Integration nach φ muß dann zwischen einer Anfangsstellung $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$ ausgeführt werden, da hiermit bereits alle Flächenteile berücksichtigt sind.

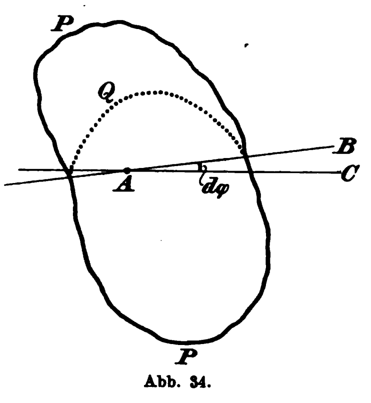


Abb. 34.

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir das Potential für den besonderen Fall berechnen, daß die Fläche P ein Kreis vom Halbmesser p und die über ihr errichtete krumme Fläche, deren Ordinate mit μ proportional ist, eine Halbkugel ist, und zwar für einen im Innern des Kreises im Abstande u vom

Mittelpunkte liegenden Punkt. Abb. 34 geht dann über in Abb. 35, in der Q ebenfalls ein Halbkreis ist, dessen Durchmesser die durch A im Kreise P in der Richtung φ gezogene Sehne ist, deren Länge mit $2s$ bezeichnet werden soll. Bezeichnen wir ferner die Massendichte im Kreismittelpunkte O mit μ_0, so wird der vorher eingeführte Proportionalitätsfaktor c gleich $\frac{\mu_0}{p}$ und für dV erhält man

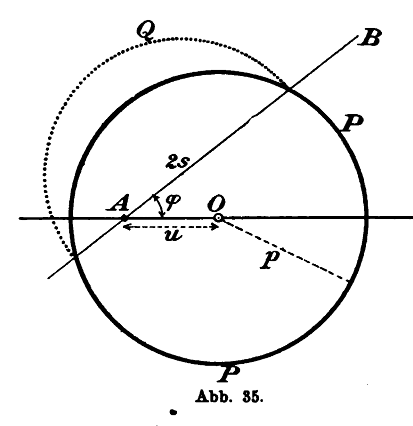


Abb. 35.

$$dV = \frac{\mu_0}{p} \cdot \frac{\pi s^2}{2} d\varphi$$

oder, wenn man s nach den Pythagoräischen Lehrsatze in φ ausdrückt,

$$dV = \frac{\mu_0}{p} \frac{\pi}{2} (p^2 - u^2 \sin^2\varphi)\, d\varphi.$$

Das haben wir nun nach φ zu integrieren, wobei es übrigens auch genügt, von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{\pi}{2}$ zu integrieren und dann mit 2 zu multiplizieren, da die übrigen Flächenteile von $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bis $\varphi = \pi$ denselben Beitrag liefern. Wir erhalten daher

$$V = 2 \frac{\mu_0}{p} \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (p^2 - u^2 \sin^2\varphi)\, d\varphi.$$

Die Integration kann leicht ausgeführt werden und liefert

$$V = \frac{\mu_0 \pi^2}{4p} (2p^2 - u^2). \tag{340}$$

Man sieht nun auch leicht ein, daß es keine besonderen Schwierigkeiten machen kann, das Potential V auf demselben Wege zu berechnen, wenn P eine Ellipse anstelle eines Kreises ist und die über P errichtete Halbkugel durch ein Ellipsoid ersetzt wird. Die Rechnungen werden dann nur etwas länger; es erscheint aber entbehrlich, darauf noch weiter einzugehen. Es mag nur erwähnt werden, daß dann V eben-

falls als eine lineare Funktion von x^2 und y^2 gefunden wird, wobei nämlich die Koordinaten x, y des Punktes A an die Stelle des beim Kreise die Lage des Punktes genügend kennzeichnenden Abstandes u treten.

§ 51. Die Hertzschen Formeln für kreisförmige Druckflächen.

Wir kommen jetzt wieder auf die Betrachtungen in § 49 zurück. In Gl. (335) war der Abstand zweier Punkte beider Körperoberflächen $z_1 + z_2$ vor der Formänderung zu

$$z_1 + z_2 = \gamma_1 x^2 + \gamma_2 y^2$$

berechnet. Weiterhin beschränken wir die Untersuchung auf den Fall, daß $\gamma_1 = \gamma_2$ ist. Bezeichnen wir diesen gemeinschaftlichen Wert mit γ und setzen $r^2 = x^2 + y^2$, so geht die Gleichung über in

$$z_1 + z_2 = \gamma r^2. \tag{341}$$

Jene Punkte der XY-Ebene in der Nähe des Koordinatenursprungs, für die der Abstand $z_1 + z_2$ einen konstanten Wert hat, liegen jetzt auf Kreisen, während sie im allgemeinen Falle auf Ellipsen lagen.

Ferner geht Gl. (338) für das Potential der in der Druckfläche liegenden Punkte über in

$$V = \frac{\gamma r^2 - \alpha}{2\left(a_1 \dfrac{m_1 - 1}{m_1} + a_2 \dfrac{m_2 - 1}{m_2}\right)}. \tag{342}$$

Dieses Potential können wir uns hervorgebracht denken durch eine Massenverteilung von der am Schlusse des vorigen Paragraphen betrachteten Art, indem wir die Werte von V in den Gleichungen (340) und (342) einander gleich setzen, wobei zu beachten ist, daß der in Gl. (340) mit u bezeichnete Abstand des betreffenden Punktes vom Ursprunge jetzt die Bezeichnung r erhalten hat. Damit wird

$$\frac{\mu_0 \pi^2}{4p}(2p^2 - r^2) = \frac{\gamma r^2 - \alpha}{2\left(a_1 \dfrac{m_1 - 1}{m_1} + a_2 \dfrac{m_2 - 1}{m_2}\right)}$$

und diese Gleichung ist in der Tat für jedes r erfüllt, falls man den Konstanten μ_0 und α die Werte

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 2\gamma p^2 \\ \mu_0 &= -\frac{2\gamma p}{\pi^2\left(a_1\frac{m_1-1}{m_1}+a_2\frac{m_2-1}{m_2}\right)} \end{aligned}\right\} \tag{343}$$

erteilt. Auch für die ganze Masse M, die in der kreisförmigen Druckfläche nach dem angenommenen Gesetze verteilt das Potential V hervorruft, können wir leicht einen Ausdruck gewinnen, indem wir das Volumen der Halbkugel vom Halbmesser p mit dem Proportionalitätsfaktor $\frac{\mu_0}{p}$ multiplizieren. Wir erhalten dadurch

$$M = \frac{\mu_0}{p}\cdot\frac{2}{3}\pi p^3 = \frac{2}{3}\pi p^2\mu_0 = -\frac{4\gamma p^3}{3\pi\left(a_1\frac{m_1-1}{m_1}+a_2\frac{m_2-1}{m_2}\right)}. \tag{344}$$

Die Masse M steht aber, wie wir am Schlusse von § 48 fanden, in einem einfachen Zusammenhange mit dem Drucke P, mit dem die beiden Körper aufeinander gedrückt werden. Nach Gl. (334) erhalten wir daher zunächst

$$P = a_1 G_1 \frac{16\gamma p^3}{3\left(a_1\frac{m_1-1}{m_1}+a_2\frac{m_2-1}{m_2}\right)},$$

wobei an Stelle des Faktors $a_1 G_1$ vor dem Bruchstriche auch $a_2 G_2$ geschrieben werden darf. Dividieren wir mit diesem Werte Zähler und Nenner, so erhalten wir

$$P = \frac{16\gamma p^3}{3\left(\frac{m_1-1}{m_1 G_1}+\frac{m_2-1}{m_2 G_2}\right)}. \tag{345}$$

Die Konstante γ in dieser Gleichung hängt von den Krümmungshalbmessern der Körperoberflächen vor der Formänderung ab und läßt sich leicht in ihnen ausdrücken, so daß sie als bekannt angesehen werden darf. Auch die Elastizitätskonstanten m und G beider Körper sind als gegeben zu betrachten. Wenn außerdem noch die Kraft P gegeben ist, mit der die

Körper gegeneinander gedrückt werden, läßt sich daher nach Gl. (345) der Halbmesser p der Druckfläche berechnen. Auch die Abplattung α und der Druck σ_z an irgend einer Stelle der Druckfläche ergeben sich dann ohne weiteres nach den Gleichungen (343) und (333). Die Aufgabe ist hiermit im wesentlichen gelöst.

Es bleibt nur noch übrig, die Rechnung für besondere Fälle weiter durchzuführen. Hierzu soll jetzt angenommen werden, daß beide Körper aus demselben Stoffe bestehen und daß die Verhältniszahl m gleich $\frac{10}{3}$ gesetzt werden kann, wie sie für schmiedbares Eisen oder Stahl gewöhnlich angenommen wird. Drückt man dann außerdem noch G im Elastizitätsmodul E aus, so wird

$$\frac{m_1 - 1}{m_1 G_1} = \frac{m_2 - 1}{m_2 G_2} = 0{,}7 \cdot \frac{1}{G} = \frac{182}{100 E}$$

und mit diesen Werten liefert die Auflösung von Gl. (345) nach p

$$p = 0{,}8804 \sqrt[3]{\frac{P}{E\gamma}}. \qquad (346)$$

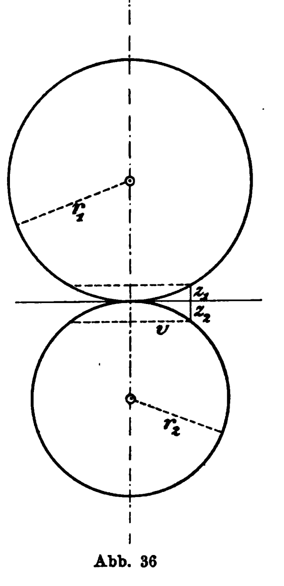


Abb. 36

Sind die beiden Körper in der Nähe des Berührungspunktes von kugelförmiger Gestalt und zwar so, daß sich die Kugeln von außen berühren, so hat man, wie aus Abb. 36 hervorgeht, nach einem einfachen planimetrischen Satze für kleine Abstände z

$$z_1 = \frac{v^2}{2 r_1}; \quad z_2 = \frac{v^2}{2 r_2}; \quad z_1 + z_2 = \frac{v^2}{2} \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}.$$

Vergleicht man dies mit Gl. (341) und beachtet, daß die dort mit r bezeichnete Strecke hier zur Vermeidung einer Verwechselung mit den Kugelhalbmessern die Bezeichnung v erhalten hat, so ergibt sich für die Konstante γ in diesem besonderen Falle

$$\gamma = \frac{r_1 + r_2}{2 r_1 r_2}. \tag{347}$$

Setzt man dies in Gl. (346) ein, so erhält man für zwei sich von außen berührende Kugeln

$$p = 1{,}109 \sqrt[3]{\frac{P}{E} \cdot \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}}, \tag{348}$$

was mit dem in Band III, Gl. (341), S. 404 der dritten Auflage angegebenen Werte übereinstimmt, abgesehen davon, daß dort zur Abkürzung 1,11 für 1,109 gesetzt war. Nachdem p berechnet ist, erhält man α aus der ersten der Gleichungen (343) und zwar hier

$$\alpha = 1{,}23 \sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2} \cdot \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}}. \tag{349}$$

Die größte Normalspannung σ_z tritt in der Mitte der Druckfläche auf und zwar ist sie dort, wie aus Gl. (344) hervorgeht, das 1,5-fache des durchschnittlichen Wertes, den man erhält, wenn man sich die Last P gleichförmig über die ganze Druckfläche vom Halbmesser p verteilt denkt. Hiernach folgt, wie leicht auszurechnen,

$$\sigma_0 = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi p^2} = 0{,}388 \sqrt[3]{P E^2 \left(\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}\right)^2}. \tag{350}$$

Wenn sich die Kugeln, wie in Abb. 37 gezeichnet, von innen berühren, hat man z_1, nämlich die Ordinate der Hohlkugel in den vorhergehenden Formeln negativ zu rechnen, da die positive Z_1-Achse nach Definition ins Innere des Körpers 1, also in Abb. 37 nach abwärts gerichtet ist. Hiermit wird, ähnlich wie vorher,

$$z_1 + z_2 = \frac{v^2}{2} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

und daher

$$\gamma = \frac{r_1 - r_2}{2 r_1 r_2}.$$

Hieraus folgt, daß man auch in den Formeln (348) bis (350) nur einfach $r_1 + r_2$ durch $r_1 - r_2$ zu ersetzen hat, um sie auf

den in Abb. 37 gezeichneten Fall anwendbar zu machen. Daß man r_1 auch gleich unendlich setzen kann, womit der eine Körper in eine Platte übergeht, ist ohne weiteres klar; dies war auch schon im dritten Bande besprochen.

Für zwei rechtwinklig gekreuzte Zylinder von den Halbmessern r_1 und r_2, deren Achsen in die Richtungen der X- und Y-Achsen fallen, findet man in derselben Weise

$$z_1 = \frac{y^2}{2r_1}; \quad z_2 = \frac{x^2}{2r_2}; \quad \gamma_1 = \frac{1}{2r_2}; \quad \gamma_2 = \frac{1}{2r_1}.$$

Hier sind daher γ_1 und γ_2 im allgemeinen verschieden groß und die Druckfläche wird elliptisch. Wenn jedoch $r_1 = r_2$

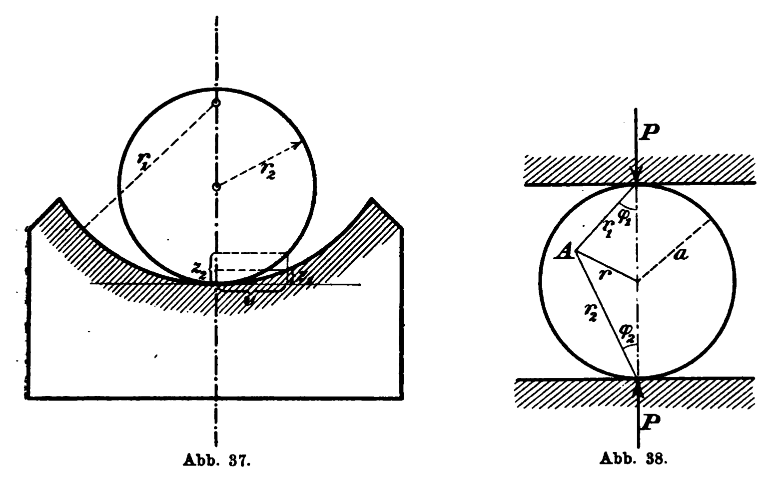


Abb. 37. Abb. 38.

ist, wird die Druckfläche kreisförmig und die Formel für den Halbmesser der Druckfläche liefert

$$p = 1{,}109 \sqrt[3]{\frac{P}{E} \cdot r}.$$

Auch α und σ_0 lassen sich hiernach ohne weiteres berechnen.

§ 52. Die Walzenlager der Brückenträger.

Hier handelt es sich um den Spannungszustand einer Walze, die zwischen zwei Platten mit einer Kraft P zusammengedrückt wird (vgl. Abb. 38). Die größte Beanspruchung des

Materials tritt natürlich in den Druckflächen und in deren Nähe auf. Wir wollen aber zunächst den Spannungszustand an allen anderen Stellen untersuchen., die von den Druckflächen weiter entfernt sind. Auch diese Aufgabe, mit der man sich schon öfters, aber in unzureichender Weise beschäftigt hat, wurde zuerst von Hertz in einer sehr kurz gefaßten Abhandlung „Über die Verteilung der Druckkräfte in einem elastischen Kreiscylinder“ (Zeitschr. f. Math. u. Physik, Bd. 28, 1883) gelöst. Freilich ist auch diese Abhandlung, die nur wenige Seiten umfaßt und dabei noch ein wesentlich allgemeiner gehaltenes Problem behandelt, durchaus nicht leicht verständlich. In der Bearbeitung, die ich hier davon gebe, wird man aber, wie ich hoffe, der Betrachtung leicht folgen können.

Die Walzen sind gewöhnlich ziemlich lang im Verhältnis zu ihrem Durchmesser und man darf daher annehmen, daß der Spannungszustand in jedem Querschnitte derselbe ist, wie in jedem anderen. Wir haben es daher mit einem ebenen Problem, d. h. mit dem Spannungszustande in einer Scheibe zu tun, der mit den im zweiten Abschnitte besprochenen Hülfsmitteln untersucht werden kann. Unsere Aufgabe kann demnach darin erblickt werden, eine Spannungsfunktion F aufzustellen, die einerseits der Differentialgleichung genügt, der sie unterworfen ist und andererseits in Übereinstimmung mit den Grenzbedingungen am Rande steht.

Man betrachte irgend einen Punkt A (Abb. 38) im Querschnitt der Walze, der soweit von der Druckfläche entfernt ist, daß man sich die Kraft P, obschon sie sich über eine kleine Strecke verteilt, durch eine Einzelkraft ersetzt denken kann. Die Abstände des Punktes A vom Kreismittelpunkte und den beiden Lastangriffspunkten seien mit r, r_1 und r_2 bezeichnet, ferner noch die Winkel, die r_1 und r_2 mit der Lastrichtungslinie bilden, mit φ_1 und φ_2. Von diesen fünf Größen würden zwei schon genügen, um die Lage des Punktes A anzugeben und die drei übrigen ließen sich in diesen beiden durch einfache Formeln ausdrücken. Wir wollen aber davon

absehen und alle fünf Größen beibehalten, weil sich die Rechnung dabei kürzer durchführen läßt.

Jedem Punkte A ist nun ein gewisser Wert der Spannungsfunktion zugeordnet und zwar, wie zunächst als Behauptung hingestellt werden soll, der Wert

$$F = c_1 r^2 - c_2 r_1 \varphi_1 \sin \varphi_1 - c_2 r_2 \varphi_2 \sin \varphi_2 \tag{351}$$

vorausgesetzt, daß die beiden Konstanten c_1 und c_2 passend bestimmt werden.

Um diese Behauptung zu beweisen, müssen wir uns zunächst überzeugen, daß der angegebene Ausdruck der Differentialgleichung der Spannungsfunktion genügt. Das geschieht, indem wir nachweisen, daß jedes der drei Glieder für sich genommen der Gleichung genügt. Dabei benützen wir die Darstellung dieser Gleichung in Polarkoordinaten nämlich (Gl. (67), S. 72)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 F = 0\,. \tag{352}$$

Diese Gleichung gilt für jede beliebige Lage des Pols, von dem wir die Abstände r zählen. Wir können daher, um für eins der drei Glieder in Gl. (351) nachzuweisen, daß es für sich genommen der Gleichung genügt, den Pol jedesmal mit dem Punkte zusammenfallen lassen, von dem aus die Abstände r oder r_1 oder r_2 genommen sind. Beginnen wir mit dem ersten Gliede, so ist hierfür der Kreismittelpunkt als Pol zu wählen. Den Spannungszustand, der durch das Glied $c_1 r^2$ dargestellt wird, können wir auch durch die Spannungskomponenten σ_r, σ_t und τ_{rt} näher beschreiben, wobei sich die Richtungen r und t auf den zugehörigen Pol beziehen. Nun war allgemein (vgl. Gl. (66), S. 71)

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\\
\sigma_t &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\\
\tau_{rt} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \varphi}
\end{aligned}\right\}. \tag{353}$$

Das Glied $c_1 r^2$ ist aber von dem Richtungswinkel φ unabhängig und daher wird für den zugehörigen Spannungszustand

$$\sigma_r = 2c_1; \qquad \sigma_t = 2c_1; \qquad \tau_{rt} = 0. \tag{354}$$

Dieser Spannungszustand entspricht daher, da σ_r und σ_t wegen $\tau_{rt} = 0$ Hauptspannungen und zwar von gleicher Größe sind, einer überall und nach allen Seiten hin gleichen Zugbeanspruchung von der Größe $2c_1$. Da sich Gl. (352) auch in der Form

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)(\sigma_r + \sigma_t) = 0 \tag{355}$$

schreiben läßt, ergibt sich, wenn man die vorstehenden Werte einsetzt, daß das Glied $c_1 r^2$ der Gleichung genügt.

Wir kommen jetzt zu dem zweiten Gliede $-c_2 r_1 \varphi_1 \sin \varphi_1$, bei dem wir uns den Pol auf den Angriffspunkt der oberen Kraft in Abb. 38 gelegt denken. Auch hier bilden wir wieder zuerst die auf diesen Pol bezogenen Spannungskomponenten σ_r, σ_t und τ nach den Gleichungen (353). Die einfache Ausrechnung liefert

$$\sigma_{r_1} = -2c_2 \frac{\cos \varphi_1}{r_1}; \quad \sigma_{t_1} = 0; \quad \tau_{r_1 t_1} = 0. \tag{356}$$

Die Differentialgleichung für die Spannungsfunktion in der Form von Gl. (355) geht daher für dieses Glied über in

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi_1^2} + \frac{1}{r_1}\frac{\partial}{\partial r_1}\right)\frac{\cos \varphi_1}{r_1} = 0$$

und wenn man die einzelnen Differentialquotienten ausrechnet, überzeugt man sich, daß diese Gleichung in der Tat identisch erfüllt ist.

Auch der durch die Gleichungen (356) dargestellte Spannungszustand ist von sehr einfacher Art. Er ist zwar nicht mehr, wie der vorige, für alle Punkte des Querschnitts derselbe; aber er ist überall ein einachsiger Spannungszustand, dessen Hauptrichtung durch den Angriffspunkt der Kraft P geht. Daraus läßt sich noch ein weiterer Schluß ziehen. Legt man nämlich, wie in Abb. 39 angegeben, durch den Punkt A

ein Linienelement ds, dessen Normale irgend einen Winkel ψ_1 mit der Richtung von r_1 bildet, so ist die Spannung, die in diesem Linienelement übertragen wird, ebenso groß und ebenso gerichtet, als wenn das Linienelement durch ein senkrecht zu r_1 gerichtetes ersetzt wäre, das als dessen vom Pole aus genommene Zentralprojektion betrachtet werden kann. Die Größe der auf die Längeneinheit übertragenen Kraft wird daher aus σ_{r_1} durch Multiplikation mit $\cos \psi_1$ gefunden.

Was hier vom zweiten Gliede der Spannungsfunktion in Gl. (351) bewiesen wurde, läßt sich ohne weiteres auch auf das ebenso gebaute dritte Glied $- c_2 r_2 \varphi_2 \sin \varphi_2$ übertragen. Der Unterschied besteht nur darin, daß hier alle Richtungen und Abstände auf den Angriffspunkt der unteren Kraft P in Abb. 38 als Pol bezogen werden müssen.

Hiermit ist also zunächst der Nachweis erbracht, daß die Funktion F in Gl. (351) der Differentialgleichung der Spannungsfunktion genügt und es handelt sich jetzt nur noch um die Erfüllung der Grenzbedingungen. Dazu beachten wir, daß die gesamte Spannung, die in einem Linienelemente ds (Abb. 39) übertragen wird, sich als geometrische Summe von drei Gliedern ergibt, deren erstes eine Zugspannung von der Größe $2c_1$ ist, während die beiden anderen mit den Richtungen von r_1 und r_2 zusammenfallen und die vorher besprochene Größe haben. Lassen wir nun das Linienelement ds mit einem Elemente des Kreisumfanges zusammenfallen, das weit genug von dem Lastangriffspunkte entfernt ist, so muß für dieses ds die geometrische Summe jener drei Glieder gleich Null sein, weil der Umfang an diesen Stellen spannungsfrei sein soll.

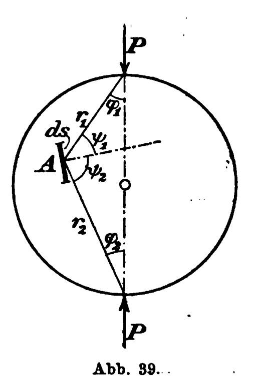


Abb. 39.

In Abb. 40 ist diese Lage von ds angegeben. Die Normale geht hier durch den Kreismittelpunkt und daher ist $\psi_1 = \varphi_1$ und $\psi_2 = \varphi_2$. Die Pfeile der von den beiden Polen

ausgehenden Kräfte sind so eingetragen, wie sie von innen nach außen hin auf ds einwirken. Die auf die Längeneinheit von ds bezogenen Größen dieser Kräfte erhält man aus Gl. (356) durch Multiplikation mit $\cos\psi_1$ bzw. $\cos\psi_2$, daher zu

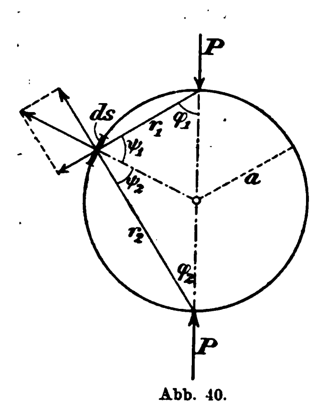


Abb. 40.

$$2c_2\frac{\cos^2\varphi_1}{r_1} \quad \text{und} \quad 2c_2\frac{\cos^2\varphi_2}{r_2}.$$

Bezeichnen wir den Durchmesser des Kreises mit d und multiplizieren in diesen Ausdrücken Zähler und Nenner mit d^2, so gehen sie über in

$$2c_2\frac{r_1}{d^2} \quad \text{und} \quad 2c_2\frac{r_2}{d^2}.$$

Die Kräfte sind daher den Abständen r_1 und r_2 für die auf dem Kreisumfang liegenden Längenelemente ds direkt proportional. Bildet man ihre Resultierende, wie dies in Abb. 40 durch Zeichnen eines Kräfteparallelogramms angedeutet ist, so geht sie in radialer Richtung nach außen; sie entspricht daher einer Druckspannung für das Element ds. Die Größe dieser Druckspannung wird nach dem Pythagoräischen Lehrsatze gleich

$$\frac{2c_2}{d} \quad \text{oder gleich} \quad \frac{c_2}{a}$$

gefunden, wenn der Halbmesser des Kreises mit a bezeichnet wird.

Zu dieser Resultierenden kommt nun noch als dritte Kraft die für alle Flächenelemente gleiche Zugspannung von der Größe $2c_1$ und man sieht, daß in der Tat die gesamte Spannung für das Umfangselement ds verschwindet, wenn man

$$2c_1 = \frac{c_2}{a} \tag{357}$$

setzt. Um die Randbedingung zu erfüllen, müssen wir daher die Spannungsfunktion F in Gl. (351) jetzt in der besonderen Form

$$F = c\left(\frac{r^2}{2a} - r_1\varphi_1 \sin\varphi_1 - r_2\varphi_2 \sin\varphi_2\right) \tag{358}$$

anschreiben, in der c für c_2 gesetzt ist.

Die Randbedingung an der Druckfläche selbst können wir mit Hülfe des bisher gewählten Ansatzes natürlich nicht prüfen, da es für die dort gelegenen Stellen nicht mehr zulässig ist, die Übertragung der Kraft an einem einzigen Angriffspunkte vorauszusetzen. Dagegen läßt sich die Konstante c daraus ermitteln, daß die Summe der in dem horizontalen Durchmesser der Walze übertragenen Druckspannungen gleich der ganzen Kraft P sein muß.

In Abb. 41 ist die Ermittelung der Spannung für ein auf dem horizontalen Durchmesser liegendes Längenelement ds angedeutet. Hier wird $\psi_1 = \varphi_1$ oder vielmehr, was aber auf dasselbe hinauskommt, $\psi_1 = -\varphi_1$ und $\varphi_2 = \varphi_1$, ebenso $r_2 = r_1$. Die vom oberen Lastangriffspunkte ausgehende Kraft hat auf die Längeneinheit bezogen die Größe

$$2c\,\frac{\cos^2\varphi_1}{r_1}$$

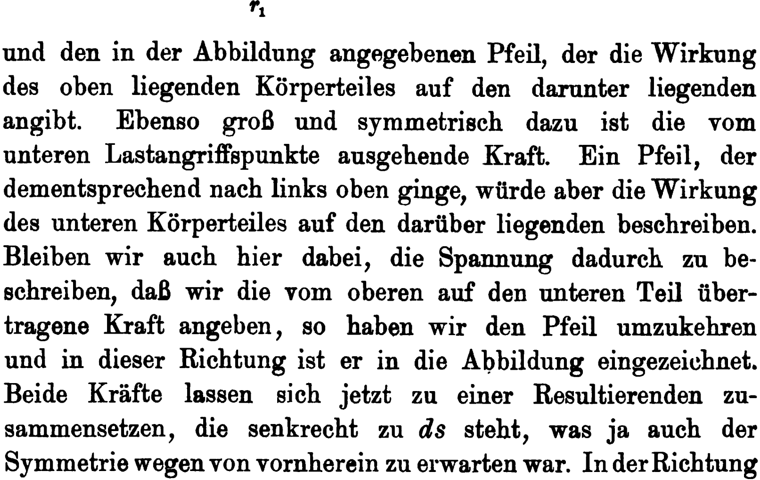


Abb. 41.

und den in der Abbildung angegebenen Pfeil, der die Wirkung des oben liegenden Körperteiles auf den darunter liegenden angibt. Ebenso groß und symmetrisch dazu ist die vom unteren Lastangriffspunkte ausgehende Kraft. Ein Pfeil, der dementsprechend nach links oben ginge, würde aber die Wirkung des unteren Körperteiles auf den darüber liegenden beschreiben. Bleiben wir auch hier dabei, die Spannung dadurch zu beschreiben, daß wir die vom oberen auf den unteren Teil übertragene Kraft angeben, so haben wir den Pfeil umzukehren und in dieser Richtung ist er in die Abbildung eingezeichnet. Beide Kräfte lassen sich jetzt zu einer Resultierenden zusammensetzen, die senkrecht zu ds steht, was ja auch der Symmetrie wegen von vornherein zu erwarten war. In der Richtung

der Normalen hat die vorher angegebene vom oberen Lastangriffspunkte ausgehende Kraft die Komponente

$$2c \frac{\cos^3 \varphi_1}{r_1}$$

und die Resultierende wird daher gleich

$$4c \frac{\cos^3 \varphi_1}{r_1} \quad \text{oder gleich} \quad \frac{4c}{a} \cos^4 \varphi_1 .$$

Das ist eine Druckspannung; dazu kommt aber noch die vom ersten Gliede der Spannungsfunktion herrührende Zugspannung und die gesamte an dieser Stelle übertragene Normalspannung σ wird daher mit Rücksicht auf Gl. (357)

$$\sigma = \frac{c}{a}(1 - 4 \cos^4 \varphi_1). \tag{359}$$

Für das am Umfange liegende Element wird $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ und $\sigma = 0$ und in der Mitte erhält σ den größten Absolutwert. Man kann auch $\cos \varphi_1$ im Abstande y vom Mittelpunkte ausdrücken und erhält damit

$$\sigma = \frac{c}{a}\left(1 - \frac{4a^4}{(a^2 + y^2)^2}\right). \tag{360}$$

Der ganze im horizontalen Durchmesser übertragene Druck wird daher

$$2\frac{c}{a}\int_0^a \left(1 - \frac{4a^4}{(a^2 + y^2)^2}\right) dy .$$

Nun ist das unbestimmte Integral

$$\int \frac{1}{(a^2 + y^2)^2} dy = \frac{1}{2a^3}\left(\frac{ay}{a^2 + y^2} + \operatorname{arctg} \frac{y}{a}\right),$$

wovon man sich durch Ausführung der Differentiation an dem rechts stehenden Werte leicht überzeugt. Für den ganzen längs des horizontalen Durchmessers übertragenen Druck erhält man daher, wie die nun ganz einfache Ausrechnung lehrt,

$$-\pi c.$$

Das negative Vorzeichen stammt daher, daß σ als Druckspannung ebenfalls überall mit dem negativen Vorzeichen behaftet war.

Bisher war die Spannung auf die Längeneinheit im Querschnitt bezogen. Beziehen wir sie weiterhin unter Beibehaltung der gefundenen Werte auf die Flächeneinheit, so müssen wir auch unter dem gesamten im horizontalen Durchmesser übertragenen Druck jenen verstehen, der auf die Längeneinheit der Walze in der Richtung der Achse entfällt. Wenn die ganze Walzenlänge mit l bezeichnet wird, kommt auf die Längeneinheit der Druck $\frac{P}{l}$ und wir haben daher

$$\frac{P}{l} = \pi c \quad \text{oder} \quad c = \frac{P}{l\pi} \tag{361}$$

zu setzen, womit die Konstante c bestimmt ist.

Die Spannung σ wird hiermit nach Gl. (360)

$$\sigma = \frac{P}{a l \pi}\left(1 - \frac{4a^4}{(a^2 + y^2)^2}\right)$$

und der Wert σ_0 in der Mitte, also für $y = 0$ wird

$$\sigma = -\frac{3P}{a l \pi}.$$

Das ist also, wie Hertz schon angegeben hat, $\frac{6}{\pi}$ mal so groß, als wenn sich der Druck längs des horizontalen Durchmessers gleichförmig verteilte.

In derselben Weise, wie es jetzt für die Elemente des horizontalen Durchmessers näher ausgeführt wurde, kann man natürlich auch für jedes andere Längenelement, das man beliebig im Querschnitt der Walze, jedoch in größerem Abstande von den Lastangriffsstellen ziehen mag, die dort übertragene Spannung nach Richtung und Größe ermitteln und zwar entweder durch Ausführung der betreffenden Differentiationen an der Spannungsfunktion oder einfacher durch Bildung der geometrischen Summe aus den drei Bestandteilen, die den Gliedern der Spannungsfunktion entsprechen, so wie es in den vorher-

gehenden Fällen gezeigt wurde. Es bleibt daher jetzt nur noch übrig, den Spannungszustand in der Nähe der Druckfläche selbst zu untersuchen.

§ 53. Fortsetzung. Der Spannungszustand in der Nähe der Druckfläche.

Der Druckfläche entspricht im Querschnitte der Walze ein kleiner Bogen, der zur Abkürzung hier (wenn auch in anderem Sinne, als das Wort sonst gebraucht wird), als die Drucklinie bezeichnet werden soll. Die Drucklinie denken wir uns noch in kleinere Elemente von höherer Ordnung zerlegt, von denen eins jetzt mit db bezeichnet sei. Den in diesem Elemente übertragenen Druck nennen wir $p\,db$, so daß also das über die ganze Drucklinie ausgedehnte Integral

$$\int p\,db = \frac{P}{l}$$

ist. Wir können den Druck $p\,db$ und den ihm auf der anderen Druckfläche diametral gegenüber liegenden von der gleichen Größe für sich genommen als eine Belastung von der im vorigen Paragraphen betrachteten Art ansehen. Dieser Belastung entspricht die Spannungsfunktion

$$F = \frac{p\,db}{\pi}\left(\frac{r^2}{2a} - r_1\varphi_1 \sin\varphi_1 - r_2\varphi_2 \sin\varphi_2\right)$$

und zwar so, daß dieser Ausdruck jetzt auch noch in der Nähe der Druckfläche gültig bleibt, falls nur der Abstand von db noch groß ist, gegenüber dem kleinen Elemente höherer Ordnung db. Fassen wir nun alle Lastenpaare $p\,db$ zusammen, so summieren sich die einzelnen Beiträge zur Spannungsfunktion und für die ganze Belastung wird

$$F = \frac{1}{\pi}\int\left(\frac{r^2}{2a} - r_1\varphi_1 \sin\varphi_1 - r_2\varphi_2 \sin\varphi_2\right)p\,db, \qquad (362)$$

wobei sich die Integration über die ganze Drucklinie zu erstrecken hat. Die Richtungswinkel φ und die Abstände r sind natürlich wie früher jedesmal auf das zugehörige Element

db zu beziehen und für die in der Nachbarschaft der Drucklinie liegenden Punkte können daher die Werte φ_1 und r_1, die sich auf die verschiedenen db beziehen nicht mehr als gleich untereinander angesehen werden, wie es früher geschehen durfte.

Für ein Linienelement ds, das jetzt von gleicher Größenordnung mit db anzunehmen ist, kann man die durch dasselbe übertragene Spannung auch nach dem im vorigen Paragraphen besprochenen Verfahren ermitteln, indem man die geometrische Summe der von den einzelnen $p\,db$ herrührenden Glieder bildet.

In Abb. 42 ist ein kleines Stück vom Querschnitt der Walze, das in der Nähe der oberen Drucklinie liegt, dargestellt und zwar in so starker Vergrößerung, daß die kleine Länge der Drucklinie dabei als eine sehr lange Linie erscheint, von der in der Zeichnung nur ein kleines Stück wiedergegeben ist. Da der Krümmungshalbmesser der Drucklinie hiermit ebenfalls äußerst groß wird, fällt das Stück der Drucklinie in der Zeichnung geradlinig aus. Der Mittelpunkt der Walze liegt auf einer Senkrechten zu dieser Geraden in großer Entfernung.

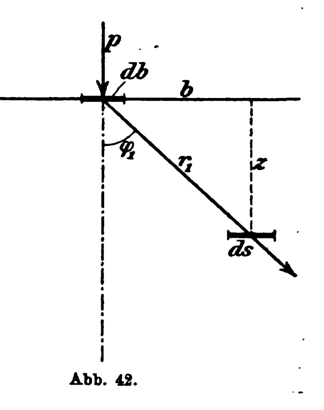


Abb. 42.

In der Nähe der Drucklinie ist in Abb. 42 ein Längenelement ds angegeben, das parallel zur Drucklinie geht und für das wir die zugehörige Spannung ermitteln wollen. Dabei beginnen wir mit dem Beitrage, der von der auf der unteren Druckfläche angreifenden Last P herrührt. Da nämlich ds von der Angriffsstelle dieser Last sehr weit entfernt ist, können wir uns diese Last in einem Punkte vereinigt denken. Die von dort aus gezogene Verbindungslinie r_2 unterscheidet sich nur unendlich wenig von einem Kreisdurchmesser und steht senkrecht zu ds, während φ_2 gleich Null ist. Die auf die

Längeneinheit bezogene Kraft ist daher nach Gl. (356) gleich $\frac{2c_2}{r_1}$ oder gleich $\frac{c_2}{a}$ und sie entspricht einer Druckspannung. Hierzu kommt die von dem ersten Gliede in der Spannungsfunktion herrührende, für alle Längenelemente ds gleiche Zugspannung von der Größe $2c_1$ oder nach Gl. (357) gleich $\frac{c_2}{a}$. Die Summe aus dieser Zugspannung und der vorher festgestellten Druckspannung von der gleichen Größe ist daher gleich Null und die im Flächenelemente ds übertragene Spannung rührt weiterhin nur noch von den Beiträgen her, die von den in der benachbarten Drucklinie übertragenen Lasten ausgehen.

Von dem Elemente db und der dazu gehörigen Last $p\,db$ in Abb. 42 rührt eine in ds übertragene Spannung her, die in der Richtung der Verbindungslinie r_1 geht und auf die Längeneinheit von ds bezogen nach den Lehren des vorigen Paragraphen die Größe

$$\frac{2p\,db}{\pi}\,\frac{\cos^2\varphi_1}{r_1}$$

hat. Der früher mit ψ_1 bezeichnete Winkel ist nämlich hier gleich mit φ_1. Am größten wird der vorstehende Ausdruck für die in der Nachbarschaft von ds liegenden Lastelemente $p\,db$, indem bei den weiter abliegenden $\cos^2\varphi_1$ sehr schnell der Null zustrebt und zugleich der Nenner r_1 immer größer wird. Nun war aber der Maßstab der Zeichnung in Abb. 42 so gewählt, daß die Drucklinie durch eine große Länge dargestellt werden sollte. Alle in der Nachbarschaft von ds liegenden db machen daher zusammen nur ein kleines Stück der Drucklinie aus und innerhalb dieses kleinen Stückes kann man den auf die Längeneinheit bezogenen Druck p als konstant betrachten.

Nach diesen Vorbemerkungen läßt sich ohne weiteres die Resultierende aller von den einzelnen $p\,db$ herrührenden Kräfte bilden. Die horizontalen Komponenten, die von den links und den rechts von ds liegenden db herrühren, heben sich nämlich gegeneinander auf, so daß also in ds keine Schub-

spannung, sondern nur eine Normalspannung übertragen wird. Die Normalspannung erhält man aber durch eine Summierung aller vertikalen Komponenten, die durch eine von $b = 0$ bis $b = \infty$ erstreckte Integration und darauf folgende Multiplikation mit 2 ausgeführt werden kann. Bezeichnen wir diese Normalspannung jetzt mit σ_z, so wird unter Berücksichtigung des der Druckspannung entsprechenden negativen Vorzeichens

$$\sigma_z = -\frac{4p}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos^3\varphi_1}{r_1}\,db_1 .$$

Setzt man hierin

$$\cos\varphi_1 = \frac{z}{r_1} \quad \text{und} \quad r_1^2 = b^2 + z^2,$$

so geht die Gleichung über in

$$\sigma_z = -\frac{4p}{\pi}\int_0^\infty \frac{z^3}{(z^2+b^2)^2}\,db . \tag{363}$$

Bei der Integration ist z als Konstante zu betrachten und das Integral kann nach einer schon im vorigen Paragraphen bebenutzen Formel sofort ausgeführt werden; die Ausrechnung liefert

$$\sigma_z = -p . \tag{364}$$

Hiermit ist der bis dahin noch fehlende Nachweis erbracht, daß die vorgeschriebene Grenzbedingung auch längs der Drucklinie selbst erfüllt ist.

§ 54. Die Zusammendrückung der Walze.

Um zu berechnen, wie groß die Verkürzung ist, die der vertikale Durchmesser der Walze in Abb. 38 unter dem Einflusse der Lasten P erfährt, müssen wir für jeden Punkt des Halbmessers, oder für jeden Abstand z von der Druckfläche zwischen 0 und a den Spannungszustand feststellen. Es genügt dabei nicht, diese Angaben nur für solche Werte von z zu machen, die groß sind im Verhältnisse zur Länge der Drucklinie, da die in der Nähe der Drucklinie gelegenen Teile zur

ganzen Zusammendrückung verhältnismäßig viel mehr beitragen, als die weiter ab gelegenen.

Zunächst berechnen wir die Spannung σ_z für solche Abstände z, die zwar immer noch klein gegenüber dem Walzenhalbmesser aber doch von gleicher Größenordnung mit der Länge der Drucklinie sind. Durch dieselbe Überlegung, die uns zu Gl. (363) führte, finden wir für diese Stellen

$$\sigma_z = -\frac{4}{\pi}\int_0^{b_1} \frac{z^3}{(z^2+b^2)^2} p\, db,$$

wenn mit b_1 die halbe Länge der Drucklinie bezeichnet wird. Abgesehen von der Änderung in der oberen Integrationsgrenze unterscheidet sich diese Formel von Gl. (363) darin, daß p jetzt als Funktion von b zu betrachten ist und daher nicht vor das Integralzeichen gesetzt werden darf. Um die Integration ausführen zu können, muß man daher wissen, nach welchem Gesetze sich p über die Drucklinie verteilt. Zur Erleichterung der Ausrechnung darf man es dabei als genau genug ansehen, eine parabolische Verteilung von p anzunehmen, also

$$p = \frac{p_0}{b_1^2}(b_1^2 - b^2) \tag{365}$$

zu setzen. Dann läßt sich das Integral leicht in geschlossener Form darstellen. Für das unbestimmte Integral hat man nämlich

$$\int \frac{b_1^2 - b^2}{(z^2+b^2)^2} db = \frac{b_1^2 + z^2}{2z^3}\left(\frac{bz}{z^2+b^2} + \operatorname{arctg}\frac{b}{z}\right) - \frac{1}{z}\operatorname{arctg}\frac{b}{z},$$

wovon man sich durch Differentiation der rechten Seite leicht überzeugt. Setzt man nun die Grenzen ein, so findet man schließlich

$$\sigma_z = -\frac{2}{\pi}\frac{p_0}{b_1^2}\left(b_1 z + (b_1^2 - z^2)\operatorname{arctg}\frac{b_1}{z}\right). \tag{366}$$

Für $z = 0$ findet man wieder wie früher $\sigma_z = -p_0$. Für einen Abstand z dagegen, der mehrmals so groß ist, wie die halbe Länge der Drucklinie b_1 kann man nach einer bekannten

Reihenentwicklung für arctg

$$\operatorname{arctg}\frac{b_1}{z} = \frac{b_1}{z} - \frac{1}{3}\left(\frac{b_1}{z}\right)^3 + \cdots$$

setzen und wenn man dies einsetzt, geht σ_z über in

$$\sigma_z = -\frac{8}{3\pi}p_0\frac{b_1}{z} + \cdots.$$

Bei hinreichend großem z kann man die hier noch folgenden Glieder mit den höheren Potenzen von $\frac{b_1}{z}$ weglassen. Beachtet man, daß nach dem in Gl. (365) für p gemachten Ansatze

$$\frac{P}{l} = \int p\,db = \frac{4}{3}p_0 b_1$$

wird, so läßt sich für die vorhergehende Formel auch

$$\sigma_z = -\frac{2P}{l\pi}\cdot\frac{1}{z}$$

schreiben und dieser Wert steht in Übereinstimmung mit jenem, der nach der früheren Vorschrift gefunden wird, wenn man sich die Drucklinie zu einem einzigen Angriffspunkte der Last zusammengezogen denkt.

Bei einem größeren Werte von z, zu dem überzugehen wir uns eben schon angeschickt haben, muß nun freilich beachtet werden, daß sich die von den beiden anderen Gliedern der Spannungsfunktion herrührenden Beiträge zu σ_z nicht mehr gegeneinander wegheben. Fügen wir diese nun ebenfalls noch bei, so erhalten wir damit den für jeden Wert von $z = 0$ bis $z = a$ gültigen Ausdruck

$$\sigma_z = -\frac{P}{l\pi}\left\{\frac{3}{2}\frac{z}{b_1^2} + \frac{3}{2b_1}\left(1 - \left(\frac{z}{b_1}\right)^2\right)\operatorname{arctg}\frac{b_1}{z} + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{2a - z} - \frac{1}{a}\right\}. \qquad (367)$$

Wie schon aus der Symmetrie hervorgeht, ist σ_z eine Hauptspannung. Die andere Hauptspannung in der Querschnittsebene, die wir mit σ_y bezeichnen wollen, läßt sich genau in derselben Weise berechnen. Es wird nicht nötig sein,

die ganze Ausrechnung nochmals vorzuführen; sie liefert den ebenfalls für jeden Wert von z zwischen 0 und a gültigen Ausdruck

$$\sigma_y = -\frac{P}{l\pi}\left\{-\frac{9}{2}\frac{z}{b^2} + \frac{3}{2b_1}\left(1 + 3\left(\frac{z}{b_1}\right)^2\right)\operatorname{arctg}\frac{b_1}{z} - \frac{1}{a}\right\}. \quad (368)$$

Insbesondere wird an der Drucklinie, also für $z = 0$

$$(\sigma_y)_{z=0} = -\frac{3}{4}\frac{P}{lb_1} + \frac{P}{l\pi a} = -p_0 + \frac{P}{l\pi a},$$

d. h. σ_y ist dort wegen Überwiegen des negativen Gliedes eine Druckspannung. Dagegen erhält man für ein großes z eine Zugspannung von der Größe $\frac{P}{l\pi a}$, die dann weiterhin von z nicht mehr abhängig ist.

In den mittleren Teilen der Walze können wir die elastische Formänderung als eine ebene betrachten. In der Nähe der Enden werden freilich auch Verschiebungen parallel zur Längsachse der Walze vorkommen; in größeren Abständen von den Enden haben wir aber nur Verschiebungen innerhalb der Querschnittsebene zu erwarten, wie wir dies ja auch schon bei der Spannungsermittelung in den vorhergehenden Paragraphen vorausgesetzt haben. Hiernach ist die Dehnung ε_x parallel zur Walzenachse gleich Null zu setzen. Zwischen den drei Hauptspannungen muß daher die Beziehung bestehen

$$\sigma_x = \frac{1}{m}(\sigma_y + \sigma_z),$$

womit auch σ_x bekannt ist. Für die Dehnungen ε_y und ε_z findet man nach dem Elastizitätsgesetze unter Berücksichtigung der vorstehenden Gleichung

$$\varepsilon_z = \frac{m^2-1}{m^2E}\sigma_z - \frac{m+1}{m^2E}\sigma_y; \qquad \varepsilon_y = \frac{m^2-1}{m^2E}\sigma_y - \frac{m+1}{m^2E}\sigma_z.$$

Für uns kommt es jetzt nur auf ε_z an. Setzt man die Werte aus den Gleichungen (367) und (368) ein, so erhält man dafür

$$\varepsilon_z = -\frac{m+1}{m^2E}\frac{P}{l\pi}\left\{(m+2)\frac{3z}{2b_1^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{2b_1}\left(m - 2 - (m+2)\left(\frac{z}{b_1}\right)^2\right)\operatorname{arctg}\frac{b_1}{z} + \frac{2(m-1)}{2a-z} - \frac{m-2}{a}\right\}. \quad (369)$$

Bezeichnen wir die Verschiebung, die der im Abstande z von der Drucklinie gelegene Punkt des vertikalen Halbmessers relativ zur Drucklinie erfährt, mit ζ, so also, daß das Negative von ζ zugleich die Verkürzung angibt, die der zwischen 0 und z liegende Teil des Halbmessers erfährt, so ist

$$\zeta = \int_0^z \varepsilon_z \, dz$$

und die Integration kann nach Einsetzen des Wertes aus Gl. (369) sofort ausgeführt werden. Dabei kann man sich der Integralformeln

$$\int \operatorname{arc\,cotg} x \, dx = x \operatorname{arc\,cotg} x + \tfrac{1}{2} \lg (1 + x^2)$$

$$\int x^2 \operatorname{arc\,cotg} x \, dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{arc\,cotg} x + \frac{x^2}{6} - \frac{1}{6} \lg (1 + x^2)$$

bedienen, von deren Richtigkeit man sich leicht überzeugen kann. Die Ausrechnung des Integrals kann mit ihrer Hülfe leicht erfolgen und liefert

$$\zeta = -\frac{m+1}{m^2 E} \frac{P}{l\pi} \left\{ \frac{3(m-2)}{2} \left(\frac{z}{b_1} \operatorname{arctg} \frac{b_1}{z} + \frac{1}{2} \lg \left(1 + \left(\frac{z}{b_1}\right)^2\right)\right) - \right.$$

$$- \frac{m+2}{2} \left(\left(\frac{z}{b_1}\right)^3 \operatorname{arctg} \frac{b_1}{z} - \left(\frac{z}{b_1}\right)^2 - \frac{1}{2} \lg \left(1 + \left(\frac{z}{b_1}\right)^2\right)\right)$$

$$\left. - 2(m-1) \lg \left(1 - \frac{z}{2a}\right) - (m-2) \frac{z}{a} \right\}.$$

Auch diese Gleichung gilt wieder für jeden Wert von z zwischen 0 und a. Für die in einem größeren Abstande z von der Drucklinie gelegenen Punkte kann man aber die Formel durch Reihenentwickelung von arctg und darauf folgende Vernachlässigung der höheren Potenzen von $\frac{b_1}{z}$ erheblich vereinfachen. Wenn man dies ausführt und die Glieder passend zusammenfaßt, erhält man

$$\zeta = -\frac{m+1}{m^2 E} \frac{P}{l\pi} \left\{ \frac{5m-8}{3} + (m-1) \lg \frac{1 + \left(\frac{z}{b_1}\right)^2}{\left(1 - \frac{z}{2a}\right)^2} - (m-2) \frac{z}{a} \right\}. \quad (370)$$

Setzen wir darin noch $z = a$, wechseln das Vorzeichen und multiplizieren mit 2, so erhalten wir die gesuchte Zusammendrückung der Walze, die wir mit w bezeichnen wollen, nämlich

$$w = 2\frac{m^2 - 1}{m^2 E}\frac{P}{l\pi}\left(\frac{2}{3} + \lg 4\left(1 + \left(\frac{a}{b_1}\right)^2\right)\right).$$

Hierin können wir aber noch mit demselben Rechte, mit dem wir die früheren Vernachlässigungen vorgenommen haben, unter dem Logarithmus den Summanden 1 gegenüber dem sehr großen Werte $\left(\frac{a}{b_1}\right)^2$ unterdrücken, womit wir die für den praktischen Gebrauch fertige Formel

$$w = 4\frac{m^2 - 1}{m^2 E}\frac{P}{l\pi}\left(\frac{1}{3} + \lg\frac{2a}{b_1}\right) \tag{371}$$

erhalten. Das Glied $\frac{1}{3}$ in der Klammer ist zwar auch noch ziemlich klein gegenüber dem Logarithmus; aber die Vernachlässigung dieses Gliedes würde hier doch erheblich mehr ausmachen, als in den früheren Fällen und da die Formel auch so schon einfach genug ist, wollen wir das Glied lieber beibehalten.

Drückt man zwei Zylinder aus dem gleichen Material, aber von sehr verschiedenen Durchmessern $2a$ aufeinander, so erfährt, wie aus Gl. (371) hervorgeht, der größere Zylinder eine weit größere gesamte Zusammendrückung als der kleinere und wenn man den Durchmesser des größeren Zylinders unendlich groß annehmen wollte, würde man sogar das zugehörige w unendlich groß finden. Darauf hat übrigens schon Hertz, der sich mit der näheren Berechnung von w nicht befaßt hat, in seiner Abhandlung über die Härte aufmerksam gemacht.

Um Gl. (371) anwenden zu können, muß man wissen, wie groß die halbe Länge der Drucklinie b_1 ist, die zu einer gegebenen Last P gehört. Nun hängt aber die Ausbildung der Druckfläche nicht von der gesamten Zusammendrückung der Walze ab, sondern nur von den relativen Verschiebungen, die

in der Nähe der Druckstelle bei der elastischen Formänderung auftreten. **Hertz** konnte daher b_1 berechnen, ohne den Ausdruck für w aufzustellen. Er betrachtete zu diesem Zwecke die Druckfläche als Grenzfall einer elliptischen Druckfläche, von der die eine Achse unendlich groß geworden ist. Dieser Grenzübergang erscheint mir allerdings nicht ganz unbedenklich und es wäre eigentlich wünschenswert, ihn dadurch zu vermeiden, daß man das ebene Problem als solches vollständig durchführte, indem man die elastischen Verschiebungen innerhalb des der Druckstelle benachbarten Bezirks feststellte. Nachdem der Spannungszustand sich überall angeben läßt, dürfte dies keine unüberwindlichen Schwierigkeiten machen, wenn auch die Lösung, wie ich aus einem vorläufigen Versuche erkannte, keineswegs einfach ist. Eine solche Durchrechnung würde wahrscheinlich die Zahlenkoeffizienten gegenüber den **Hertz**schen Formeln etwas ändern. Für die praktische Anwendung wird diese Änderung aber kaum von Bedeutung sein, und man kann sich daher getrost der **Hertz**schen Formeln bedienen, die ich schon im dritten Bande unter den Nummern (350) und (351) der dritten Auflage angeführt habe. In die hier gebrauchten Bezeichnungen umgeschrieben lauten sie

$$b_1 = 1{,}52\sqrt{\frac{Pa}{lE}}$$

$$p_0 = 0{,}418\sqrt{\frac{PE}{la}}.$$

Wenn man die Formel für b_1 annimmt, würde in der zweiten Formel nach der in diesem Paragraphen zu Grunde gelegten parabolischen Druckverteilung innerhalb der Drucklinie, der Koeffizient 0,418 eigentlich durch 0,49 zu ersetzen sein. Ich glaube übrigens nicht, daß der **Hertz**sche Wert mehr Vertrauen verdient, als der andere, der von vornherein nur als ein Näherungswert erscheint, da bei dem vorher erwähnten Grenzübergange, auf dem die **Hertz**sche Formel beruht, nicht darauf gerechnet werden kann, daß die Art der Druckverteilung innerhalb der Druckfläche ungeändert bleibt.

Der Unterschied kommt aber praktisch, wie schon bemerkt, kaum in Frage.

Setzt man den Wert von b_1 in Gl. (371) ein, so geht sie über in

$$w = 2\,\frac{m^2-1}{m^2 E}\,\frac{P}{l\pi}\left(1{,}207 + \lg\frac{alE}{P}\right). \tag{372}$$

Der Logarithmus bezieht sich selbstverständlich wie in den früheren Formeln auf die Basis $e = 2{,}718\ldots$

§ 55. Die Spannungsverteilung in einem durchlochten Zugstabe nach Kirsch.

Ein Eisenstab von rechteckigem Querschnitte, der einem Zugversuche unterworfen werden soll, möge in der Mitte durchbohrt sein, so daß die Achse des zylindrischen Loches senkrecht zur Breitseite des Querschnitts und zugleich zur Längsachse des Stabes steht (vgl. Abb. 43). In den Querschnitten, die weit genug von dem Loche entfernt sind, werden sich zwar die Zugspannungen annähernd gleichförmig verteilen; in jenem Querschnitte, der durch die Lochmitte selbst gelegt werden kann, trifft dies aber jedenfalls nicht mehr zu. Wenn der Lochdurchmesser klein ist im Verhältnisse zur Querschnittsbreite, wird die Spannungsverteilung in der Nähe des Loches ungefähr ebenso ausfallen, als wenn das Loch in einer unendlich breiten Blechtafel angebracht wäre, die ebenso nach einer Richtung hin auf Zug beansprucht wird, wie vorher der Zugstab.

Abb. 43.

Für diesen Fall läßt sich, wie der verstorbene Professor Kirsch in Chemnitz gezeigt hat (Zeitschr. d. Ver. D. Ing. 1898, S. 797), die Spannungsverteilung unter Voraussetzung der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes genau berechnen. Kirsch hat den Rechnungsgang an der angegebenen Stelle nur angedeutet. Da die Frage von praktischer Wichtigkeit ist, werde ich den Beweis ausführlicher geben. Dabei kommt mir der Umstand zu statten, daß sich

die Rechnungen bedeutend abkürzen lassen, wenn man von dem Begriffe der Spannungsfunktion Gebrauch macht, was hier ohne weiteres möglich ist, da es sich um ein Scheibenproblem handelt.

Die von Kirsch abgeleiteten Formeln entsprechen nämlich der Spannungsfunktion

$$F = \frac{1}{4} p \left\{ r^2 - 2a^2 \lg r - \frac{(r^2 - a^2)^2}{r^2} \cos 2\varphi \right\}. \qquad (373)$$

Darin sind r, φ Polarkoordinaten (vgl. Abbildung 44) des Punktes A, auf den sich F bezieht und zwar so, daß der Pol mit dem Mittelpunkte des kreisförmigen Loches und die Anfangsrichtung $\varphi = 0$ mit der Richtung der Zugspannung in den weit vom Loche entfernten Stellen der Blechtafel zusammenfällt. Unter a ist der Halbmesser des Loches zu verstehen und von der Konstanten p wird sich herausstellen, daß sie die Größe der Zugspannung in den weit vom Loche entfernten Stellen angibt.

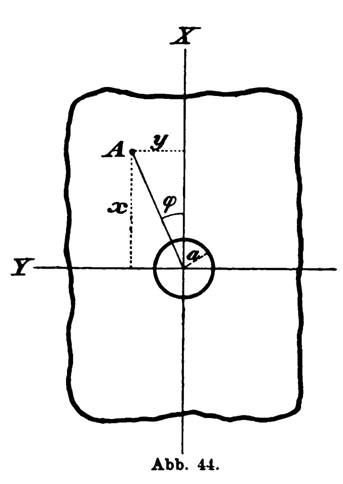


Abb. 44.

Um den Beweis zu führen, daß Gl. (373) die Lösung des Problems richtig angibt, bilde ich zunächst die dazu gehörigen Spannungskomponenten σ_r, σ_t und τ_{rt}, was nach den Gleichungen (353), S. 335, sofort geschehen kann. Die Ausführung der dort vorgeschriebenen Differentiationen liefert

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{1}{2} p \left\{ 1 - \frac{a^2}{r^2} + \left(1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4}\right) \cos 2\varphi \right\} \\
\sigma_t &= \frac{1}{2} p \left\{ 1 + \frac{a^2}{r^2} - \left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right) \cos 2\varphi \right\} \\
\tau_{rt} &= \frac{1}{2} p \left(- 1 - \frac{2a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right) \sin 2\varphi
\end{aligned}\right\}. \qquad (374)$$

Das sind die von **Kirsch** aufgestellten Gleichungen. Der Nachweis, daß die Spannungsfunktion F der Differentialgleichung genügt, der sie unterworfen ist, kann jetzt leicht erbracht werden, wenn man diese Gleichung in der ihr schon in Gl. (355) gegebenen Form

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)(\sigma_r + \sigma_t) = 0$$

anschreibt. Man hat nämlich nach den Gleichungen (374)

$$\sigma_r + \sigma_t = p\left(1 - \frac{2a^2}{r^2}\cos 2\varphi\right)$$

und hieran lassen sich die Differentiationen nach r und φ sehr leicht ausführen. Setzt man aber die Differentialquotienten in die vorhergehende Gleichung ein, so findet man, daß sie in der Tat für alle Werte von r und φ erfüllt ist.

Hiernach bleibt nur noch nachzuweisen, daß auch den Grenzbedingungen entsprochen wird. Was zunächst den Lochrand betrifft, so müssen für ihn sowohl σ_r als τ_{rt} zu Null werden. Das trifft aber in der Tat zu, wenn man in den Gl. (374) $r = a$ setzt. Hierbei bemerkt man noch, daß die dritte Spannungskomponente σ_t für $r = a$ nicht verschwindet, sondern am Lochrand den größten Wert annimmt, der für ein gegebenes φ und bei verschiedenen Werten von r überhaupt möglich ist. Da sich die Lösung nur auf den außerhalb des Loches gelegenen Teil der Ebene beziehen soll, können nämlich nur solche Werte von r miteinander verglichen werden, die entweder gleich oder größer als a sind. Der größte Wert von σ_t und hiermit die größte überhaupt vorkommende Spannung entsteht an der Stelle $r = a$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und wird

$$\sigma_{\max} = 3p. \tag{375}$$

Um nun auf die weiteren Grenzbedingungen zu kommen, die sich auf den sehr weit von dem Loche entfernten äußeren Umfang des Bleches beziehen, stellen wir zunächst fest, was aus den Gl. (374) wird, wenn r so groß gegen a ist, daß man es als unendlich groß betrachten darf. Dann erhält man

$$\sigma_r = \frac{1}{2} p (1 + \cos 2\varphi) = p \cos^2 \varphi$$
$$\sigma_t = \frac{1}{2} p (1 - \cos 2\varphi) = p \sin^2 \varphi$$
$$\tau_{rt} = -\frac{1}{2} p \sin 2\varphi.$$

Diese Werte entsprechen aber, wie ein Vergleich mit den Formeln für den einachsigen Spannungszustand (Band III, Gl. (15), S. 32 d. 3. Aufl.) lehrt, einem einachsigen Spannungszustande, dessen von Null verschiedene Hauptspannung gleich p ist und in die Richtung $\varphi = 0$, d. h. in die Richtung der in Abb. 44 eingezeichneten X-Achse fällt.

Demnach sind auch alle verlangten Grenzbedingungen erfüllt und der Beweis für die Richtigkeit der in Gl. (373) aufgestellten Lösung ist vollständig erbracht.

Hiermit könnte man sich begnügen; aber Kirsch hat bei dem umständlicheren Beweisverfahren, das er einschlug, doch noch ein weiteres bemerkenswertes Ergebnis gefunden, indem er auch die Komponenten der Verschiebungen $\xi \eta \zeta$ bei der elastischen Formänderung aufgestellt hat. Ich kann mich hier darauf beschränken, die Formeln anzugeben, ohne die nach dem gewöhnlichen Verfahren vorzunehmenden umständlichen Rechnungen zu ihrem Beweise vorzuführen; sie lauten:

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \frac{p}{G}\left\{\frac{m}{2(m+1)}x + \frac{m-1}{m}\frac{a^2 x}{r^2} + \frac{(r^2-a^2)(x^2-3y^2)a^2 x}{4r^6}\right\}\\
\eta &= \frac{p}{G}\left\{-\frac{1}{2(m+1)}y - \frac{m-2}{2m}\frac{a^2 y}{r^2} + \frac{(r^2-a^2)(3x^2-y^2)a^2 y}{4r^6}\right\}\\
\zeta &= -\frac{p}{G}\frac{1}{2(m+1)}z.
\end{aligned}\right\} \quad (376)$$

Für die sehr weit vom Lochrand entfernten Punkte verschwinden in den beiden ersten Gleichungen die übrigen Glieder in der Klammer gegenüber dem ersten und es bleiben nur die Verschiebungen übrig, wie sie dem einachsigen Spannungszustande mit der Hauptspannung p entsprechen. Am Lochrand selbst verschwinden die letzten Glieder in der Klammer und man erkennt, daß der Kreis durch die Formänderung in eine Ellipse übergeht.

Die Spannungserhöhung durch das Loch ist, wie aus Gl. (375) hervorgeht, sehr beträchtlich, da die Zugspannung an der meist beanspruchten Stelle dreimal so groß ist, als wenn das Loch nicht vorhanden wäre. Dieses Ergebnis ist sehr bemerkenswert; zu seiner Beurteilung sind aber noch einige Erläuterungen notwendig.

Die berechnete Spannungsverteilung bleibt nämlich nur so lange bestehen, als die Voraussetzung der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes erfüllt ist, auf Grund deren sie berechnet wurde. Sobald die Belastung des durchlochten Zugstabs in der Festigkeitsmaschine so weit gesteigert wird, daß die Proportionalitätsgrenze an der meist gespannten Stelle überschritten ist, ändert sich die Art der Spannungsverteilung ab und dies späterhin um so mehr, je größere bleibende Dehnungen an den stärkst gespannten Stellen auftreten. Bei einem zähen Metalle weicht schließlich die Spannungsverteilung in dem durch die Lochmitte gehenden Querschnitte nicht mehr erheblich von einer gleichförmigen ab und daher spricht sich der Einfluß des Loches in der Bruchbelastung kaum noch aus. Da überdies eine größere Einschnürung des Querschnittes vor dem Bruche nicht zu stande kommen kann, bedarf es sogar unter Umständen einer größeren Belastung zur Herbeiführung des Bruches, als bei einem Stabe, dessen Querschnittsfläche überall gleich der des durchlochten Stabes an der Lochstelle ist. Bei spröden Stoffen ist dies aber natürlich anders.

Dieselbe Betrachtung behält auch in vielen anderen Fällen ihre Gültigkeit und sie lehrt allgemein, daß bei dehnbaren Stoffen die Tragfähigkeit gegenüber ruhenden Lasten durch die Ausgleichung der Spannungen infolge der bleibenden Formänderungen immer dann beträchtlich erhöht werden kann, wenn eine Abänderung des innerhalb des rein elastischen Teiles der Formänderung auftretenden Spannungszustandes zu Gunsten der Tragfähigkeit überhaupt möglich ist.

Trotzdem bedeutet aber auch bei den zähen Metallen die Durchlochung eine unter Umständen sehr gefährliche Schwächung. Zunächst nämlich wird dadurch

die dem Bruche vorausgehende bleibende Dehnung ganz bedeutend herabgesetzt, da die von dem Loche entfernten Stellen des Stabs kaum gestreckt werden, bevor der Bruch eintritt. Die Arbeit der äußeren Kraft, die zum Zerreißen aufgewendet werden muß, wird daher durch den Einfluß des Loches sehr vermindert, d. h. der Stab kann, wie es auch die Erfahrung lehrt, durch einen Stoß viel leichter zerbrochen werden, als ein nicht durchbohrter von dem entsprechenden Querschnitte. Hierzu trägt überdies auch noch der Umstand bei, daß der vorher besprochene günstige Einfluß der bleibenden Dehnungen auf die Ausgleichung der Spannungen während der kurzen Stoßzeit nicht, oder wenigstens nicht in dem gleichen Maße zur Geltung kommen kann, wie bei einer langsamen Steigerung der Belastung. Daraus erklärt es sich, warum Löcher, scharfe Eindrehungen an den Rändern, Sprünge oder Anrisse und sonstige derartige Materialfehler die Widerstandsfähigkeit gegen Stöße bedeutend herabsetzen, während sie sich unter einer ruhenden Belastung kaum bemerklich machen.

Aber auch noch in einem anderen, nicht minder wichtigen Falle bleibt die theoretisch erschlossene Spannungserhöhung zu Recht bestehen, da sie durch einen später folgenden Spannungsausgleich nicht abgeschwächt werden kann. Nämlich dann, wenn der durchlochte Stab abwechselnden Zug- und Druckbelastungen ausgesetzt ist, die sich sehr häufig wiederholen. Wenn dabei an der meist beanspruchten Stelle die Elastizitätsgrenze auch nur wenig überschritten wird, kommen bleibende Formänderungen, wenn auch nur von sehr geringem Betrage zu stande, die in abwechselndem Sinne aufeinanderfolgen und die nach hinreichend häufiger Wiederholung schließlich das Gefüge des Materials zerstören und so zu einem Bruche führen, der sich, nachdem er einmal an der meist beanspruchten Stelle eingeleitet ist, bald weiterhin fortsetzt.

Die Ingenieure der Praxis sind nur zu gut mit diesen Brüchen bekannt, die sich gewöhnlich erst nach längerem Be-

triebe einstellen und zwar an Stellen, die nach der gewöhnlichen Annahme verhältnismäßig niedrig beansprucht sind, an denen aber in Wirklichkeit infolge von Löchern, scharfen Eindrehungen u. dgl. bedeutende Spannungserhöhungen gegenüber dieser Annahme auftreten. Zu einer Abschätzung der Größe, die sie erreichen können, vermag in vielen Fällen das hier besprochene Ergebnis der Untersuchung von Kirsch einen guten Anhaltspunkt zu liefern.

§ 56. Der Spannungszustand in einem lockeren Erdkörper.

Die Theorie des Erddrucks gehört streng genommen nicht zur Festigkeitslehre, weil man dabei nicht von der Betrachtung der elastischen Formänderungen ausgeht, sondern sich auf andere Erwägungen stützt. Freilich vermag auch ein Erdkörper elastische Formänderungen auszuführen, wovon bei früheren Gelegenheiten schon wiederholt die Rede war und die Spannungsverteilung wird durch sie ohne Zweifel ebenfalls beeinflußt. Wichtiger noch ist aber hier der andere Umstand, daß sich innerhalb des Erdkörpers Gleitflächen bilden, sobald der auf ein Flächenelement übertragene Druck, gleichgültig wie groß oder wie klein er nun sein mag, mit der Normalen zum Flächenelement einen Winkel einschließt, der den Reibungswinkel übersteigt. In der Lehre vom Erddruck beschäftigt man sich im wesentlichen nur mit den Folgerungen, die sich aus dieser Eigenschaft eines lockeren Erdkörpers ableiten lassen. Das Untersuchungsverfahren schließt sich aber im übrigen eng an das in der Festigkeitslehre gebrauchte an, soweit die Beziehungen zwischen den Spannungskomponenten in Frage kommen. Aus diesem Grunde soll an dieser Stelle ein kurzer Abriß davon gegeben werden.

Die Hauptfrage, die hier behandelt werden soll, ist die folgende. Auf den horizontalen Erdboden sei eine Schicht lockeren Sandes in überall gleicher Höhe und auf große horizontale Entfernungen hin aufgeschüttet. Wir betrachten den Spannungszustand in dieser Sandschicht an irgend einer Stelle,

die hinreichend weit von den Rändern entfernt ist, um annehmen zu können, daß er von deren Nähe nicht beeinflußt ist. Längs jeder Lotrechten, die wir uns in dieser Weise durch die Sandschicht gezogen denken können, haben wir dann denselben Spannungszustand zu erwarten. Für eine Z-Achse, die senkrecht nach abwärts gezogen ist, können wir σ_z sofort angeben. Denken wir uns nämlich ein Prisma von der Grundfläche dF und der Höhe z, so muß

$$\sigma_z dF = \gamma z dF,$$

also

$$\sigma_z = \gamma z \tag{377}$$

sein, wenn wir mit γ das Gewicht der Volumeneinheit des Sandes bezeichnen. Der Druck in lotrechter Richtung ist ebensogroß als er in einer Flüssigkeit von demselben γ wäre.

Zugleich folgt, daß Z mit der Richtung der einen Hauptachse des Spannungszustandes zusammenfällt, daß

$$\sigma_x = \sigma_y$$

ebenfalls Hauptspannungen sind und daß überhaupt jede horizontale Richtung zugleich die Richtung einer Hauptspannung angibt. Das Spannungsellipsoid ist hier ein Umdrehungsellipsoid mit senkrecht gerichteter Umdrehungsachse.

Von dem Spannungszustande in einer Flüssigkeit weicht der in unserem Sandkörper nur dadurch ab, daß σ_x und σ_y von σ_z verschieden sind und unsere nächste Aufgabe besteht darin, das Verhältnis der horizontal gerichteten Hauptspannungen zu der senkrecht gerichteten zu ermitteln. Offenbar hängt dieses Verhältnis von den besonderen physikalischen Eigenschaften des Sandes ab. Wären die einzelnen Sandkörner ohne jede Reibung aneinander verschieblich, so hätte der Sandkörper die Eigenschaften einer Flüssigkeit und σ_x müßte gleich σ_z, das gesuchte Verhältnis also gleich 1 sein. In der Tat wird also der horizontal gerichtete Druck von der Größe der Reibung abhängig sein müssen.

Um den Grad der Reibung zu kennzeichnen bedient man sich am besten des Reibungswinkels, der hier auch als der

natürliche Böschungswinkel bezeichnet wird. Am Rande dacht sich der Sandkörper beim Aufschütten unter diesem Winkel ab: Eine steilere Böschung vermag der Sand nicht anzunehmen, denn wenn man versuchen wollte, die Böschung noch steiler aufzuschütten, würden die weiter aufgebrachten Sandkörner von der Oberfläche abrollen. Nach der Lehre von der Reibung tritt dies ein, sobald der Winkel zwischen der Normalen zur Böschung und dem lotrecht nach abwärts gerichteten Gewichte den Reibungswinkel übersteigt. In der Tat ist also der natürliche Böschungswinkel nichts anderes als der Reibungswinkel; dieser sei mit φ bezeichnet.

Wir wollen uns jetzt aus dem Erdkörper ein kleines Prisma herausgeschnitten denken. Die Längsrichtung des Prismas möge in die horizontale Richtung der Y-Achse fallen; der Querschnitt sei ein rechtwinkliges Dreieck, von dem eine Kathete dx in die Richtung der X-Achse fällt, während die andere von der Länge dz senkrecht nach oben geht. Die Hypotenuse bilde den Winkel ψ mit der horizontalen Richtung. Als Zeichnung dieses Querschnitts kann Abb. 5, S. 27 des dritten Bandes, dritte Auflage angenommen werden, abgesehen davon, daß hier die Buchstaben etwas anders gewählt sind als dort. Wir können uns auch auf die dort in § 6 durchgeführten Untersuchungen über den Spannungszustand hier ohne weiteres stützen. Für die dort mit σ' und τ' bezeichneten Spannungskomponenten, die zur Hypotenuse gehören, haben wir nach den Gl. (9), da τ hier gleich Null ist,

$$\left.\begin{aligned} \sigma' &= \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} + \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}\cos 2\psi \\ \tau' &= \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\sin 2\psi \end{aligned}\right\} . \qquad (378)$$

Es fragt sich jetzt, wie groß der Winkel ist, den der aus σ' und τ' resultierende Druck mit der Normalen zur Hypotenuse bildet. Dieser Winkel sei mit χ bezeichnet; man hat dafür

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{\tau'}{\sigma'} = \frac{(\sigma_x - \sigma^z)\sin 2\psi}{\sigma_x + \sigma_z + (\sigma_z - \sigma_x)\cos 2\psi} .$$

Entwickelt man die Funktionen $\sin 2\psi$ und $\cos 2\psi$ und dividiert in Zähler und Nenner mit $\cos^2\psi$, so geht dies über in

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{(\sigma_x - \sigma_z)\operatorname{tg}\psi}{\sigma_z + \sigma_x \operatorname{tg}^2\psi}. \tag{379}$$

Für uns ist es nun von Wichtigkeit, die größte Winkelabweichung χ' der resultierenden Spannung von der zugehörigen Normalen zu berechnen. Diese wird bei irgend einer Neigung ψ' der Hypotenuse zur Horizontalen eintreten, zu deren Ableitung wir uns des gewöhnlichen Verfahrens zur Aufsuchung eines Maximums oder Minimums bedienen. In Gl. (379) kommt ψ nur in der Form $\operatorname{tg}\psi$ vor und wir können daher gleich hiernach differentiieren. Wir finden

$$\frac{d\operatorname{tg}\chi}{d\operatorname{tg}\psi} = (\sigma_x - \sigma_z)\frac{\sigma_z + \sigma_x \operatorname{tg}^2\psi - 2\sigma_x \operatorname{tg}^2\psi}{(\sigma_z + \sigma_x \operatorname{tg}^2\psi)^2}.$$

Wenn wir diesen Ausdruck gleich Null setzen, erhalten wir zur Bestimmung von ψ' die Gleichung

$$\sigma_z - \sigma_x \operatorname{tg}^2\psi' = 0.$$

Hiernach ist

$$\operatorname{tg}\psi' = \pm\sqrt{\frac{\sigma_z}{\sigma_x}} \tag{380}$$

Das doppelte Wurzelvorzeichen gibt an, daß ein Maximum oder Minimum, jedenfalls also der größte Absolutwert der Winkelabweichung χ' bei zwei symmetrisch zueinander liegenden Schnittrichtungen auftritt, was freilich von vornherein selbstverständlich war. Wenn wir uns nur um diesen Absolutwert kümmern, finden wir aus Gl. (379) nach Einsetzen von ψ' aus (380)

$$\operatorname{tg}\chi' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\sigma_z}{\sigma_x}} - \sqrt{\frac{\sigma_x}{\sigma_z}}\right). \tag{381}$$

Dies ist, nebenbei bemerkt, wie eine einfache goniometrische Umrechnung lehrt, gleichbedeutend mit

$$\sin\chi' = \frac{\sigma_z - \sigma_x}{\sigma_z + \sigma_x},$$

in welcher Form Rankine, von dem diese Betrachtung zuerst angestellt wurde, die Bedingung für χ' ausdrückt.

Jedenfalls darf χ' nicht größer als der Reibungswinkel φ sein, weil sonst ein Abgleiten längs der durch ψ' angegebenen Schnittrichtungen eintreten müßte. Deshalb nennt man diese Schnittrichtungen auch die Gleitflächen und es kann kein Zweifel darüber bestehen, daß das allmähliche Setzen frisch aufgeschütteter lockerer Erdmassen durch ein solches Abgleiten zu stande kommt. Für uns handelt es sich nun um den Grenzzustand des Gleichgewichts; der diesem entsprechende horizontale Druck σ_x wird als der aktive Erddruck bezeichnet. Wenn die Erdmasse vorher eine große Last trug, die nachher entfernt wurde, kann σ_x freilich auch größer sein, ebenso wenn die Erde festgestampft wurde. Nach dem Abtragen einer größeren Last muß sich σ_z sofort entsprechend vermindern, von dem horizontalen Drucke σ_x gilt dies aber nicht. Es kann sogar sein, daß σ_x von früher her einen Wert behält, der noch größer ist, als σ_z. Indessen kann auch hier das Verhältnis zwischen beiden jenen Wert nicht übersteigen, der zu einem Gleiten im Erdkörper führt. Der größte mit σ_z hiernach verträgliche Wert von σ_x wird als der passive Erddruck bezeichnet.

Wir ermitteln jetzt den aktiven Erddruck σ_x, also den kleinsten Wert dieses Seitendruckes, der mit dem Gleichgewichtszustande des Erdkörpers verträglich ist. Dazu setzen wir in Gl. (381) $\operatorname{tg}\chi' = \operatorname{tg}\varphi$ und lösen die Gleichung nach dem Verhältnisse $\frac{\sigma_x}{\sigma_z}$ auf. Wenn wir noch zur Abkürzung

$$\operatorname{tg}\varphi = f$$

setzen und f den Reibungskoeffizienten nennen, erhalten wir

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_z} = 2f^2 + 1 \pm 2f\sqrt{f^2 + 1}. \tag{382}$$

Um daraus den aktiven Erddruck zu erhalten, müssen wir das negative Wurzelzeichen nehmen; das positive Wurzelvorzeichen entspricht dem passiven Erddrucke.

Setzt man z. B. $\varphi = 35^0$, also $f = 0{,}70$, ein Wert, der ungefähr dem wirklichen Verhalten des Sandes entsprechen soll (eigene Versuche habe ich darüber nicht angestellt), so wird σ_x nach Gl. (382)

$$\sigma_x = 0{,}27\ \sigma_z$$

gefunden, also rund gleich einem Viertel von σ_z, eine Verhältniszahl, von der man bei ungefähren Abschätzungen öfters Gebrauch macht.

Man kann die vorher abgeleiteten Formeln auch noch in etwas anderer Weise verwenden. Durch Einsetzen von $\sqrt{\frac{\sigma_z}{\sigma_x}}$ aus Gl. (380) in (381) erhält man nämlich, mit $\chi' = \varphi$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}^2\psi' - 1}{2\operatorname{tg}\psi'} = -\operatorname{cotg} 2\psi'. \qquad (383)$$

Nun ist beim aktiven Erddrucke $\sigma_x < \sigma_z$, $\operatorname{tg}\psi'$ daher nach Gl. (380) größer als 1, ψ' selbst daher größer als 45^0, $2\psi'$ demnach ein stumpfer, der Reibungswinkel φ dagegen ein spitzer Winkel. Aus Gl. (383) folgt somit

$$2\psi' = \frac{\pi}{2} + \varphi \quad \text{oder} \quad \psi' = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}. \qquad (384)$$

Hieraus folgt eine einfache Regel für die Konstruktion der Gleitflächen. Diese sind unter 45^0 + dem halben Reibungswinkel gegen die Horizontale, oder allgemeiner gegen die Richtung der kleineren Hauptspannung geneigt.

Anmerkung. Rankine hat diese Betrachtungen angewendet, um daraus die zulässige Belastung des Erdbodens durch das Fundament eines Bauwerks zu berechnen. Man denke sich nämlich den Erdboden bis zu einer Tiefe h aufgegraben und ihn dann in dieser Tiefe mit einem Drucke p auf die Flächeneinheit belastet. Ehe der Boden unter diesem Drucke nachgeben kann, muß $\sigma_z = p$ über die Hauptspannungen σ_x und σ_y in dem vorher berechneten Verhältnisse hinausgewachsen sein, d. h. der horizontale Druck beträgt im Grenzfalle nur etwa ein Viertel von p. An den Seiten des Fundaments grenzt aber die stark belastete Erde an die nur durch die Erddecke von der Höhe h belastete an. Hier darf, damit das Gleichgewicht nicht gestört wird, der horizontale Druck

den durch das Gewicht der Erde hervorgerufenen senkrechten von der Größe γh nicht zu sehr übersteigen. Setzt man hier dasselbe Verhältnis ein, so würde man als Grenzbelastung des Fundaments, unter Voraussetzung der vorher angegebenen Zahlenwerte den Wert $\frac{\gamma h}{(0,27)^2}$ oder rund $14 \gamma h$ erhalten.

Diese Abschätzung leidet freilich an verschiedenen Mängeln, vor allem daran, daß auf die Festigkeit des „gewachsenen" Bodens keine Rücksicht genommen ist. Der sogenannte gewachsene Boden gleicht keineswegs einem Sandhaufen, sondern vermag auch Zugspannungen aufzunehmen, so daß der Widerstand gegen ein Abgleiten keineswegs allein auf die Reibung zurückzuführen ist. Außerdem ist auch die Spannungsverteilung namentlich an den Grenzen des Fundaments nicht von so einfacher Art, wie sie vorausgesetzt wurde. Hier spielen die elastischen Eigenschaften des Bodens eine wichtige Rolle. Man ist daher von solchen Rechnungen zurückgekommen und bemißt die Tragfähigkeit des Bodens gewöhnlich ausschließlich auf Grund der unmittelbaren Erfahrung.

§ 57. Anwendbarkeit dieser Betrachtungen auf die Berechnung des Erddrucks gegen Stützmauern.

Man denke sich durch den Sandkörper, von dem vorher die Rede war, eine lotrechte Ebene gelegt und die auf der einen Seite dieser Ebene liegende Hälfte des Sandkörpers entfernt. Dagegen soll an die Stelle dieser Hälfte eine Mauer treten, gegen die sich die andere Hälfte des Sandkörpers stützt. Wenn die Mauer nicht da wäre, würde der Sand abstürzen und erst wieder ins Gleichgewicht kommen, nachdem die natürliche Böschung hergestellt wäre. Dieser Bewegung widersetzt sich die Mauer und sie erfährt dabei einen Druck von dem Erdkörper. Man soll diesen Druck ermitteln.

Am nächsten liegt es, diesen Druck auf die Stützmauer gleich dem Drucke σ_x zu setzen, den die eine Hälfte des Sandkörpers vorher auf die andere Hälfte ausübte. Zur Begründung kann man sagen, daß es für die stehen gebliebene Hälfte nichts ausmachen könne, ob sie durch die andere Hälfte oder

durch eine diese ersetzende Mauer im Gleichgewichte gehalten werde. Indessen ist diese Erwägung doch nicht ganz richtig. So lange die eine Hälfte des Sandkörpers noch durch die andere gestützt ist, folgt aus Symmetriegründen, daß σ_x eine Hauptspannung sein muß. Diese Symmetrie geht aber vollständig verloren, sobald die Mauer an die Stelle der einen Hälfte tritt. Es kann dann sehr wohl sein, daß neben σ_x auch noch eine Tangentialspannung τ zwischen Erde und Mauer übertragen wird. Wenn man bedenkt, daß eine Mauer leicht ein wenig nachgibt, indem sie unter dem Einflusse der seitlichen Belastung eine kleine Drehung um eine wagrechte Achse ausführt, wird man sogar zu der Anschauung geführt, daß zwischen Erde und Mauer τ den vollen Betrag der mit der Normalkomponenten σ verträglichen Reibung annehmen werde. Über diesen Punkt ist schon viel gestritten worden und der Meinungsstreit wird auch wohl nicht eher aufhören, als bis es gelungen ist, die Frage auf einwandfreie Weise durch Versuche zu entscheiden.

Wenn die Hinterfläche der Mauer absolut glatt hergestellt werde könnte, so daß man sicher wäre, daß keine Reibung zwischen ihr und der Erde auftreten könnte, wäre es aber natürlich ganz unbedenklich, die Ergebnisse des vorigen Paragraphen auf diesen Fall zu übertragen. Unter diesen Umständen wäre es in der Tat gleichgültig, ob die Stützung der einen Hälfte des Erdkörpers durch die andere Hälfte oder anstatt deren durch die Mauer erfolgte. Sonst ist aber von den früheren Ergebnissen nur mit Vorsicht Gebrauch zu machen.

Man kann sich einen durch eine horizontale Ebene begrenzten Erdkörper auch durch eine Mauer gestützt denken, deren Rückenfläche in der Richtung der einen Gleitfläche des unbegrenzten Erdkörpers geht. Dazu muß sie nach Gl. (384) den Winkel $\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$, also bei $\varphi = 35^0$ einen Winkel von $62^1/_2{}^0$ mit der Horizontalen bilden. Ein solcher Fall kommt praktisch freilich kaum vor; wenn er aber verwirklicht wäre,

könnte man mit größerem Rechte als vorher bei der senkrecht begrenzten Mauer sagen, daß der Ersatz des fortgenommenen Teiles des Erdkörpers durch die Mauer in dem Spannungszustande des stehen gebliebenen Teiles keine Änderung herbeigeführt haben könne. Denn in der Tat wird die Rückenfläche bei den kleinen Bewegungen, die Mauer und Erdkörper nachher noch ausführen, ganz wie vorher bei den Bewegungen des Sandkörpers allein als eine Gleitfläche dienen. Voraussetzung ist dabei, das der Reibungswinkel zwischen Erde und Mauerwerk mindestens ebensogroß als der zwischen Erde und Erde ist. Als Erddruck auf die Rückenfläche der Mauer können wir daher die sich für eine Gleitfläche nach den Untersuchungen des vorigen Paragraphen ergebende Spannung annehmen. Diese fällt übrigens der Richtung nach mit der anderen Gleitfläche zusammen, denn der Winkel zwischen beiden Gleitflächen folgt nach Gl. (384) zu $\frac{\pi}{2} - \varphi$ bzw. $\frac{\pi}{2} + \varphi$. Die Komponenten σ' und τ' dieses Erddrucks können aus den Gleichungen (378) ohne weiteres entnommen werden, wenn man σ_x nach Gleichung (382) in σ_z ausdrückt und ψ' an Stelle von ψ setzt; für $2\psi'$ nimmt man den aus Gleichung (384) folgenden Wert. Es hat keinen Zweck, dies hier weiter auszurechnen.

Außerdem kommt noch ein anderer Fall in Betracht, auf den man die Untersuchungen über den Spannungszustand im unbegrenzten Erdkörper ebenfalls ohne weiteres übertragen kann. Der Erdkörper sei hier nämlich nach oben hin durch eine unter dem natürlichen Böschungswinkel φ geneigte Ebene begrenzt. In diesem Falle kennt man sofort die eine Gleitfläche für jeden Punkt des unbegrenzten Erdkörpers; sie läuft parallel mit der Oberfläche. Die andere Gleitfläche bildet aber mit dieser den Winkel $\frac{\pi}{2} - \varphi$ und daraus folgt, daß sie lotrecht steht. Die Richtungen der Hauptspannungen werden nun auch bekannt; sie fallen mit den Halbierungslinien der von den Gleitflächen gebildeten Winkel zusammen.

Denkt man sich diesen Erdkörper durch eine Mauer mit lotrechter Rückenfläche gestützt, so wird gegenüber dem Zustande im unbegrenzten Erdkörper keine Änderung herbeigeführt, da die Rückenfläche nach wie vor als Gleitfläche dient. Aus der Symmetrie des Spannungszustandes um die Hauptrichtungen herum folgt ferner, daß der Druck auf die eine Gleitfläche ebenso groß ist als der auf die andere. Der Druck auf die zur natürlichen Böschung parallele Gleitfläche kann aber leicht angegeben werden. Er ist gleich dem Gewichte des darüber lastenden Erdkörpers. Für ein Flächenelement dF in der Tiefe z unter der Oberfläche (gemessen in der Richtung der Schwere) ist dieses Gewicht gleich

$$\gamma z dF \cos \varphi.$$

Der Druck auf die Flächeneinheit der Rückenfläche der Stützmauer in der Tiefe z ist daher ebenfalls gleich

$$\gamma z \cos \varphi,$$

und dieser Druck geht parallel zur Böschung, bildet also den Reibungswinkel φ mit der Normalen zur Rückenfläche.

§ 58. Die Sprödigkeit der Steine.

Die in diesem Bande angestellten Untersuchungen beziehen sich zunächst in der Regel nur auf solche Körper, von denen man annehmen darf, daß sie dem Hookeschen Gesetze von der Verhältnisgleichheit zwischen Spannungen und Formänderungen gehorchen. Auf andere Körper, also namentlich auf Gußeisen und auf Steine lassen sich diese Lehren aus den schon im dritten Bande besprochenen Gründen nur näherungsweise und mit Vorsicht anwenden.

Für Steine und ähnliche Körper hat man freilich verwickeltere Festigkeitsaufgaben, wie sie in diesem Bande besprochen wurden, nur selten zu lösen. Dagegen ist der Stein ein so wichtiges Baumaterial, daß eine genauere Kenntnis der

ihm zukommenden Festigkeitseigenschaften, soweit sie für praktische Verwendungszwecke in Frage kommen, sehr erwünscht ist. Abgesehen von dem, was schon im dritten Bande besprochen wurde, weiß man darüber allerdings nicht viel, was sich in einer gedrängten theoretischen Fassung wiedergeben ließe. Man ist vielmehr in der Hauptsache auf die unmittelbare Verwendung praktischer Versuchsergebnisse angewiesen. Sobald sich aber auf diesem Wege Gesetzmäßigkeiten erkennen lassen, die sich zu einer einfachen Darstellung eignen, tut man gut, sie auch in der Theorie zur Sprache zu bringen, und zwar selbst wenn man dabei zunächst dahin gestellt sein lassen muß, ob sie sich nicht nur in den besonderen Fällen, aus denen sie abgeleitet wurden, sondern ganz allgemein bewähren werden. Denn eine solche theoretische Aufstellung, die zunächst nur auf einer wohl begründeten Vermutung beruht, vermag erst eine geeignete Grundlage für die weitere experimentelle Erforschung der betreffenden Erscheinungen abzugeben.

Diese Erwägungen führen mich dazu, hier die Folgerungen mitzuteilen, die ich aus einer großen Zahl von Versuchen über die Widerstandsfähigkeit von Steinen gegen Stöße abgeleitet habe. Eine ausführliche Veröffentlichung der Versuchsergebnisse findet man in den „Mitteilungen aus dem mechanisch-technischen Laboratorium der Kgl. Technischen Hochschule in München", Heft 30, Verlag von Th. Ackermann in München, 1906.

Bei diesen Versuchen wurden die Steine in der Form von Würfeln von etwa 3 bis zu 7 cm Kantenlänge geprüft, indem man sie in einem zu diesem Zwecke besonders hergestellten Schlagwerke einer Reihe von Schlägen aus verschiedenen Höhen aussetzte, bis sie zertrümmert wurden. Der Schlag des Hammers, der gewöhnlich ein Gewicht von 50 kg hatte, wird zunächst von einer kleinen Stahlplatte aufgenommen, die auf den Steinwürfel aufgesetzt wird. Auf die übrigen Einzelheiten der Versuchsausführung, die man in der angegebenen Quelle nachlesen kann, brauche ich hier nicht einzugehen.

Wenn man solche Versuche vornimmt, bemerkt man zunächst, daß es für jeden Steinwürfel eine gewisse Hubhöhe h_0 des Hammers gibt, die ich als die „unwirksame" bezeichnet habe, aus der man eine große Zahl von Schlägen abgeben kann, ohne daß der Würfel dadurch zerstört wird. Wählt man dagegen die Hubhöhe des Hammers größer als h_0, so wird zwar durch die ersten Schläge auch keine sichtbare Veränderung des Würfels herbeigeführt; wenn man aber die Schläge aus derselben Höhe h immer weiter fortsetzt, so wird schließlich nach einer Anzahl n dieser Schläge der Würfel zerstört. Die Zahl n ist, wie sich voraussehen ließ, unter sonst gleichen Umständen um so kleiner, je mehr h die „unwirksame" Hubhöhe h_0 überschreitet. Und zwar besteht, wenigstens bei den Steinen, die ich daraufhin untersucht habe, die Beziehung, daß man

$$n = \frac{a}{h - h_0}$$

setzen kann. Wie aus der Gleichung schon hervorgeht, gibt die in ihr vorkommende Konstante a an, um wieviel h größer sein muß, als h_0, damit ein einziger Schlag gerade ausreicht, um den Würfel vollständig zu zerstören.

Die Konstanten a und h_0 hängen noch von dem Hammergewichte Q, dem sie umgekehrt proportional gesetzt werden können und dem Volumen V des Würfels ab, zu dem sie, wie die Versuche lehren, unmittelbar proportional sind. Bildet man daher aus der vorigen die neue Gleichung

$$\frac{aQ}{V} = n\left(\frac{hQ}{V} - \frac{h_0 Q}{V}\right)$$

so sind die beiden in ihr vorkommenden Konstanten $\frac{aQ}{V}$ und $\frac{h_0 Q}{V}$ nur noch von dem Material abhängig, dessen Widerstandsfähigkeit gegen Stöße durch sie vollständig beschrieben wird. Die beiden Materialkonstanten haben die Dimension einer auf die Volumeneinheit bezogenen Arbeitsleistung oder auch, was auf dasselbe hinauskommt, die Dimension einer auf die Flächen-

einheit bezogenen Spannung, d. h. sie können ebenso wie die Druckfestigkeit in atm. ausgedrückt werden.

Ein Körper, der zwar große ruhende Lasten aufzunehmen vermag, aber durch Stöße leicht zerstört wird, heißt „spröde“. Im umgekehrten Falle nennt man ihn „zähe“. Durch diese Bezeichnungen der Umgangssprache wird eine Eigenschaft ausgedrückt, die für praktische Verwendungszwecke, insbesondere für die Verwendung von Steinen zu Straßenbauzwecken, offenbar von großer Bedeutung ist. Um diese Eigenschaft zahlenmäßig ausdrücken zu können, muß man zunächst eine genauere Definition der Sprödigkeit oder Zähigkeit aufstellen, da diese Begriffe in der Umgangssprache zu unbestimmt sind, als daß man eine Messung darauf gründen könnte. Dabei ist der Willkür noch ziemlich viel Spielraum gelassen, wenn auch kein Zweifel darüber möglich ist, daß die Materialkonstanten $\frac{aQ}{V}$ und $\frac{h_0 Q}{V}$ dabei zu verwenden sind. Bei der Wahl, die man noch treffen kann, wird man vor allem auf die praktische Brauchbarkeit der in solcher Weise näher bestimmten Begriffe Rücksicht zu nehmen haben und zwar namentlich auf die Möglichkeit, die danach anzugebenden Zahlenwerte aus den Versuchsergebnissen leicht ableiten zu können.

In dieser Hinsicht hat man nun mit der Schwierigkeit zu kämpfen, daß eine Anzahl von Versuchskörpern, die aus demselben Material hergestellt und in der gleichen Weise behandelt werden, in der Regel ziemlich große Unterschiede aufweisen, die von zufälligen Umständen herrühren. Man muß daher stets eine größere Zahl (mindestens etwa sechs) Würfel in derselben Weise behandeln, um sicher sein zu können, daß der aus den sechs Versuchsergebnissen gebildete Mittelwert — etwa der Schlaganzahl n bei dem vorher beschriebenen Vorgehen — durch zufällige Abweichungen nicht mehr zu stark beeinflußt sein kann. Hiermit hat man aber erst eine einzige Angabe und um a und h_0 einigermaßen genau ermitteln zu können, muß man daher eine größere Zahl von Versuchen vornehmen. Das erfordert so viel Zeit und so große Kosten,

daß man sie nicht häufig und nicht für alle verschiedenen Materialien, die man miteinander vergleichen möchte, aufwenden kann.

Diese Umstände nötigen in der Regel zu einem Verzichte auf die Ermittelung der Materialkonstanten $\frac{aQ}{V}$ und $\frac{h_0 Q}{V}$ und zu einem abgekürzten Verfahren der Ermittelung der Widerstandsfähigkeit gegen Stöße und hiermit der Zähigkeit oder Sprödigkeit, so daß diese nicht mehr Mühe macht als man zur Untersuchung jeder einzelnen Steinsorte füglich anzuwenden vermag. Für solche Prüfungen zu praktischen Zwecken habe ich mich daher für das folgende Verfahren entschieden.

Jeder Steinwürfel wird zuerst ausgemessen. Sollte sein Volumen gerade 25 cm^3 betragen, so wird auf ihn ein erster Schlag des 50 kg schweren Hammers aus 1 cm Höhe abgegeben. Bei einem anderen Volumen wird die erste Hubhöhe d in demselben Verhältnisse größer oder kleiner angenommen, also z. B. bei 100 cm^3 zu $d = 4$ cm. Dann folgt ein zweiter Schlag aus der Höhe $2d$, ein dritter aus der Höhe $3d$ usf., bis der Würfel zerstört ist. Von dem letzten Schlage kann man ungefähr einschätzen, zu welchem Anteile er noch zur Zerstörung nötig war; die damit verbundene Unsicherheit macht im Versuchsergebnisse nur wenig aus. Dann ermittelt man die gesamte, bei allen diesen Schlägen aufgewendete Arbeitsleistung und dividiert sie durch das Volumen des Würfels. Der in dieser Weise abgeleitete Wert bildet auch eine Materialkonstante, die natürlich von den beiden vorher besprochenen abhängig ist, nun aber unmittelbar zur Beurteilung der Widerstandsfähigkeit gegen Stöße verwendbar ist. Ich bezeichne sie als die „Wertziffer" des Materials; sie wird selbstverständlich nach dem Mittelwerte der Prüfungsergebnisse von einer Anzahl (gewöhnlich sechs) nach dem gleichen Verfahren behandelten Würfeln angegeben.

Für die Beurteilung der Verwendbarkeit eines Steinmaterials etwa zum Straßenbau kommt es auf die Wertziffer selbst an. Man kann aber daraus unmittelbar auch ein Maß

für die Sprödigkeit ableiten, indem man die in gewöhnlicher Weise (mit ungeschmierten Druckflächen) ermittelte Druckfestigkeit durch diese Wertziffer dividiert. Der reziproke Wert der Sprödigkeit kann als Maß der Zähigkeit dienen. Beide Verhältnisse sind absolute Zahlen. Bei den bisher nach diesem Verfahren vorgenommenen Bestimmungen lag das Sprödigkeitsverhältnis zwischen etwa 2,8 (bei einem besonders zähen Granit) und etwas über 30 (bei Sandsteinen oder Beton).

Zusammenstellung der wichtigsten Formeln.

I. Abschnitt.

Spannungszustand und Bruchgefahr; Momente von Massen.

Seite

$$\mathfrak{r}'\mathfrak{s} = \mathfrak{r}\mathfrak{s}', \qquad (4) \quad 7$$

Zusammenhang zwischen den Spannungen $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{s}'$, die auf der **Spannungskugel** A zu irgend zwei Einheitsvektoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$ gehören.

$$\delta\sigma = 2\mathfrak{s}\,\delta\mathfrak{r}, \qquad (6) \quad 8$$

$\delta\sigma$ Änderung der Normalspannung σ, die zu einem Fortschreiten um $\delta\mathfrak{r}$ auf der Spannungskugel gehört.

$$\sigma = r_1^2\sigma_x + r_2^2\sigma_y + r_3^2\sigma_z. \qquad (8) \quad 10$$

$$\tau = \sqrt{r_1^2 r_2^2(\sigma_y - \sigma_x)^2 + r_1^2 r_3^2(\sigma_z - \sigma_x)^2 + r_2^2 r_3^2(\sigma_z - \sigma_y)^2}. \qquad (9) \quad 11$$

σ und τ Normal- und Schubspannung an einer Stelle der Spannungskugel mit den Koordinaten $r_1 r_2 r_3$, wenn $\sigma_x \sigma_y \sigma_z$ die drei Hauptspannungen sind.

$$r_1^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_z - \sigma)(\sigma_y - \sigma)}{(\sigma_z - \sigma_x)(\sigma_y - \sigma_x)}. \qquad (11) \quad 15$$

Auflösung der vorhergehenden Gleichungen nach r_1.

$$\mathfrak{A} = \sum m\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{r}, \qquad (16) \quad 30$$

$\mathfrak{A}$ **Vektormoment** einer aus den Massen m bestehenden Massenverteilung in Bezug auf einen Punkt, von dem die Radienvektoren $\mathfrak{r}$ nach den m gezogen sind und in Bezug

Seite

auf eine durch diesen Punkt gehende Achse mit dem Einheitsvektor $\mathfrak{a}$.

$$\left.\begin{array}{lll} \sigma_x = \Theta_x, & \sigma_y = \Theta_y, & \sigma_z = \Theta_z \\ \tau_{xy} = \Phi_{xy}, & \tau_{xz} = \Phi_{xz}, & \tau_{yz} = \Phi_{yz} \end{array}\right\} . \qquad (20) \quad 32$$

Zusammenhang zwischen den Spannungskomponenten σ_x usf. mit den Trägheits- und Zentrifugalmomenten Θ und Φ einer Massenverteilung, wenn diese zur Darstellung des Spannungszustandes gebraucht werden.

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A} + \mathfrak{a}\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p} M, \qquad (21) \quad 35$$

$\mathfrak{B}$ Vektormoment für einen zweiten Punkt, von dem nach dem ersten, auf den sich $\mathfrak{A}$ bezieht, der Radiusvektor $\mathfrak{p}$ geht, M die Gesamtmasse; die Achse $\mathfrak{a}$ ist in beiden Fällen dieselbe.

II. Abschnitt.

Elastizitätstheorie der Scheiben und der Platten.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z = 0 \end{array}\right\} . \qquad (24) \quad 45$$

Gleichgewichtsbedingungen gegen Verschieben am Volumenelemente; ebenso wie die nächsten Formeln aus Band III übernommen.

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_x = 2G\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial x} + \dfrac{e}{m-2}\right) \\ \sigma_y = 2G\left(\dfrac{\partial \eta}{\partial y} + \dfrac{e}{m-2}\right) \\ \sigma_z = 2G\left(\dfrac{\partial \zeta}{\partial z} + \dfrac{e}{m-2}\right) \end{array}\right\} , \qquad (27) \quad 48$$

$$\left.\begin{aligned}\tau_{xy} = \tau_{yx} &= G\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\\ \tau_{xz} = \tau_{zx} &= G\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)\\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= G\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)\end{aligned}\right\} . \qquad (28) \quad 48$$

$$e = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} . \qquad (29) \quad 48$$

Zurückführung der Spannungskomponenten σ und τ auf die Verschiebungskomponenten $\xi \eta \zeta$, G Schubelastizitätsmodul, e kubische Ausdehnung.

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2 \xi + \frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial x} + \frac{X}{G} &= 0\\ \nabla^2 \eta + \frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial y} + \frac{Y}{G} &= 0\\ \nabla^2 \zeta + \frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial z} + \frac{Z}{G} &= 0\end{aligned}\right\} , \qquad (32) \quad 49$$

elastische Grundgleichungen, XYZ Komponenten der auf die Volumeneinheit bezogenen äußeren Massenkraft: diese kann gewöhnlich vernachlässigt werden.

$$\nabla^2 e = 0 , \qquad (35) \quad 50$$

$$\nabla^2 \cdot \nabla^2 \xi = 0 , \qquad (35a) \quad 50$$

Differentialgleichungen, denen e oder ξ (und ebenso η und ζ) für sich genügen müssen (durch Elimination aus den elastischen Grundgleichungen gefunden).

$$\frac{\partial^4 \zeta_0}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \zeta_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta_0}{\partial y^4} = 0 , \qquad (45) \quad 53$$

Gleichung für die Verschiebung ζ_0 der Mittelfläche einer Platte, wenn überall $\sigma_z = 0$ gesetzt werden kann.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} ; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} , \qquad (49) \quad 56$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - cx + a , \qquad (50) \quad 56$$

Spannungskomponenten für den Fall ebener Formänderungen ausgedrückt in einer Spannungsfunktion F;

Seite

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0, \qquad (53) \quad 58$$

Differentialgleichung, der diese Spannungsfunktion genügen muß;

$$\sigma_z = \frac{1}{m}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) + \frac{m+1}{m} 2Gk, \qquad (55) \quad 59$$

Ausdruck für die zur Ebene senkrechte Spannungskomponente σ_z, k eine Konstante.

$$\frac{E}{G}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{1}{h}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{h}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{1}{mh}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)$$
$$+ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{h}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{mh}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) = 0. \qquad (61) \quad 64$$

Differentialgleichung für die Spannungsfunktion einer Scheibe von veränderlicher Dicke h, wobei

$$s_x = h\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

ist usf.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\right) = 0, \qquad (67) \quad 72$$

Differentialgleichung für die Spannungsfunktion F einer Scheibe von konstanter Dicke in Polarkoordinaten r, φ; dabei ist

$$s_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}, \quad s_t = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad t = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right). \qquad (66) \quad 71$$

Für den Fall, daß F von φ unabhängig ist, vereinfacht sich die Differentialgleichung zu der sofort integrablen Gleichung

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dF}{dr}\right) = 0. \qquad (68) \quad 72$$

$$F = (\alpha r^{n+2} + \beta r^{-n+2} + \gamma r^n + \delta r^{-n}) \sin n\varphi. \qquad (90) \quad 91$$

Lösung der Gleichung (67) für die Spannungsfunktion für jedes ganze positive n, das größer ist als 1.

$$r\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{dF}{dr} - \frac{F}{r} - \frac{1}{h}\frac{dh}{dr}\left(r\frac{dF}{dr} - \frac{1}{m}F\right)$$
$$+ \left(3 + \frac{1}{m}\right)\varkappa h r^2 = 0, \qquad (96) \quad 95$$

Seite

Gleichung für die Spannungsfunktion einer rotierenden Scheibe von ungleicher Dicke h; k ein Faktor, der der Winkelgeschwindigkeit proportional ist. Für den Fall, daß

$$h = cr^n \qquad (97)$$ **95**

gesetzt werden kann, lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$F = ar^{n+3} + Ar^{\alpha} + Br^{\beta}, \qquad (99)$$ **96**

worin A und B die willkürlichen Integrationskonstanten und die Konstanten a, α, β bestimmte Werte bedeuten.

$$\frac{m^2 E}{m^2 - 1} \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial^4 \zeta_0}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \zeta_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta_0}{\partial y^4} \right) = p, \qquad (106)$$ **105**

Biegungsgleichung einer Platte mit der Belastung p; ζ_0 ist die Ausbiegung der Mittelfläche, h die konstante Dicke;

$$\zeta_0 = c \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2, \qquad (108)$$ **106**

Lösung der Gleichung für die elliptische Platte von den Halbachsen a und b bei eingespanntem Rande für eine gleichförmig verteilte Belastung; c eine mit der Belastung proportionale Konstante;

$$\sigma_{\max} = \frac{4p}{h^2 \left(\frac{2}{a^2} + \frac{4}{3b^2} + \frac{2a^2}{b^4} \right)}, \qquad (110)$$ **108**

größte Spannung am Plattenrande.

$$\frac{m^2 E}{m^2 - 1} \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 \zeta_0 = p, \qquad (112)$$ **110**

Plattengleichung in Polarkoordinaten r, φ; vereinfacht sich erheblich, wenn ζ_0 unabhängig von φ ist.

$$q = k\zeta_0, \qquad (116)$$ **112**

Platte auf nachgiebiger Unterlage, k Bettungsziffer, q Auflagerdruck für die Flächeneinheit, ζ_0 Einsenkung.

$$\frac{m^2 E}{m^2 - 1} \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial^4 \zeta_0}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \zeta_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta_0}{\partial x^4} \right) = p - k\zeta_0, \qquad (117)$$ **112**

Seite

Differentialgleichung für die Platte auf nachgiebiger Unterlage, p die auf die Flächeneinheit bezogene Belastung.

$$\mathsf{E}^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}, \qquad (119)\ \textbf{114}$$

Definitionsgleichung des Operators E^2.

$$\frac{m^2 E}{m^2-1}\frac{h^3}{12k} = l^4, \qquad (121)\ \textbf{114}$$

Einführung der Länge l, die das elastische Verhalten der Platte auf nachgiebiger Unterlage am kürzesten kennzeichnet. Mit dieser Hülfsgröße schreibt sich die Differentialgleichung der kreisförmigen, symmetrisch belasteten Platte an allen Stellen, die unbelastet sind, in der einfachen Form

$$l^4 \mathsf{E}^4 \zeta_0 + \zeta_0 = 0. \qquad (122)\ \textbf{115}$$

Die Lösung dieser Gleichung für die in der Mitte belastete Platte findet sich mit der Abkürzung $z = \frac{\zeta_0}{l}$ und $x = \frac{r}{l}$ in Gl. (140), S. 119. Die dabei auftretenden Integrationskonstanten werden durch die Gleichungen (147) bis (149), S. 122, ermittelt. In § 22, S. 125 findet man ein vollständig durchgerechnetes Zahlenbeispiel.

$$\frac{m^2 E}{m^2-1}\frac{h^3}{12}\left(\frac{\partial^4 \zeta_0}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \zeta_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta_0}{\partial y^4}\right) + \mu\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial t^2} = 0, \qquad (151)\ \textbf{130}$$

Differentialgleichung für die Plattenschwingungen, μ auf die Flächeneinheit bezogene Masse der Platte.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} + \frac{p}{h} = 0, \qquad (164)\ \textbf{139}$$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = E\left(\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right), \qquad (165)\ \textbf{139}$$

simultane Differentialgleichungen für die dünne Platte mit großer Ausbiegung; dabei ist F die Spannungsfunktion, ζ die Ausbiegung, p die Belastung, h die als konstant vorausgesetzte Wanddicke. Für den Fall der kreisförmigen, symmetrisch belasteten Platte vereinfachen sich diese Gleichungen zu

Seite

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{dF}{dr}\frac{d\zeta}{dr}\right)+\frac{pr}{h}=0, \qquad (167)\ \mathbf{142}$$

$$r\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2F}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dF}{dr}\right)=-\frac{E}{2}\left(\frac{d\zeta}{dr}\right)^2, \qquad (168)\ \mathbf{142}$$

die sich für gewisse Annahmen von p als Funktion von r integrieren lassen.

III. Abschnitt.

Die Verdrehungselastizität von prismatischen Stäben und von Umdrehungskörpern.

$$\eta = cxz; \qquad \zeta = -cxy, \qquad (169)\ \mathbf{145}$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}=0, \qquad (170)\ \mathbf{145}$$

$$\frac{\dfrac{\partial\xi}{\partial z}-cy}{\dfrac{\partial\xi}{\partial y}+cz}=\frac{dz}{dy}, \qquad (172)\ \mathbf{146}$$

Grundgleichungen für das Torsionsproblem des prismatischen Stabs, ξ Verschiebung in der Richtung der Stabachse, $\eta\,\zeta$ Verschiebungskomponenten in der Querschnittsebene, c Verdrehungswinkel für die Längeneinheit. Die letzte Gleichung bezieht sich auf die Grenzbedingung am Querschnittsumfang, wobei $z=f(y)$ die Gleichung der Umrißlinie sein soll.

$$\xi=-cyz+\frac{32a^2}{\pi^3}c\left\{\frac{\sin\frac{\pi y}{2a}\sinh\frac{\pi z}{2a}}{\cosh\frac{\pi b}{2a}}-\frac{\sin 3\frac{\pi y}{2a}\sinh 3\frac{\pi z}{2a}}{3^3\cosh 3\frac{\pi b}{2a}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sin 5\frac{\pi y}{2a}\sinh 5\frac{\pi z}{2a}}{5^3\cosh 5\frac{\pi b}{2a}}-\cdots\right\}, \qquad (179)\ \mathbf{155}$$

Seite

Lösung für den rechteckigen Stab mit den Halbseiten a und b; auf S. 155 ist im Nenner des zweiten Gliedes in der Klammer ein Druckfehler stehen geblieben, indem es dort $\cosh 4 \frac{\pi b}{2a}$ heißt, während die 4 durch 3 zu ersetzen ist, wie vorstehend angegeben.

$$\Delta\varphi = 7{,}014 \frac{Ml}{G a_1^4}, \qquad (184)$$ **159**

Formel für den Verdrehungswinkel $\Delta\varphi$ einer Welle von der Länge l und quadratischem Querschnitt, a_1 Querschnittsseite, M Torsionsmoment, G Schubelastizitätsmodul.

$$M = c G \frac{16}{3} a^3 (b - 0{,}63 a), \qquad (186)$$ **160**

Formel für den auf die Längeneinheit bezogenen Verdrehungswinkel c eines rechteckigen Stabs, dessen eine Halbseite b viel größer ist als die andere a.

$$\tau_{\max} = 0{,}592 \frac{M}{a^3} = 4{,}74 \frac{M}{a_1^3}, \qquad (189)$$ **162**

$\tau_{\max}$ größte Verdrehungsspannung für einen Stab von quadratischem Querschnitt von der Seite $a_1 = 2a$.

$$\tau_{\max} = \frac{3M}{8a^2(b - 0{,}63a)}, \qquad (190)$$ **163**

dasselbe für einen sehr flachen rechteckigen Querschnitt ($b > a$).

$$c = \frac{80 M}{G s^4 \sqrt{3}}, \qquad (195)$$ **167**

c Verdrehungswinkel für die Längeneinheit eines Stabs von regelmäßig dreieckigem Querschnitt, s Querschnittsseite.

$$\tau_{\max} = \frac{20 M}{s^3}, \qquad (196)$$ **168**

die größte Spannung für diesen Fall.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = -2cG, \qquad (198)$$ **170**

Seite

Differentialgleichung für die Spannungsfunktion des Torsionsproblems mit $\tau_{xy} = -\frac{\partial F}{\partial z}$ usf.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{p}{S} = 0, \qquad (202)$$ **176**

Differentialgleichung für die Ausbiegung w einer elastischen Haut von der gleichmäßigen Anspannung S unter der Belastung p. Auf dem Vergleiche dieser Gleichung mit der vorhergehenden beruht die experimentelle Lösung des Torsionsproblems.

$$\xi = 0; \quad \eta = pz; \quad \zeta = -py, \qquad (204)$$ **179**

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{3}{r}\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \qquad (209)$$ **181**

$$\frac{dr}{dx} = \frac{\frac{\partial p}{\partial r}}{\frac{\partial p}{\partial x}}, \qquad (212)$$ **183**

Grundgleichungen für das Torsionsproblem eines Umdrehungskörpers; die Variable p erhält ihre Deutung durch die Gleichungen (209) und (212), von denen die letzte sich auf die Grenzbedingung an der Umrißlinie des Längsschnittes bezieht.

$$p = \frac{C}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad (213)$$ **186**

Lösung für den kegelförmigen Stab, C eine dem Torsionsmomente proportionale Konstante.

$$\frac{du}{dn} = \frac{u}{R} + 3\frac{u_x}{r}, \qquad (223)$$ **192**

Differentialgleichung für die Flüssigkeitsströmung u der hydrodynamischen Abbildung des Spannungsfeldes im Längsschnitte des Umdrehungskörpers, u_x die X-Komponente von u, R Krümmungshalbmesser der Stromlinie, r Abstand von der X-Achse, $\frac{d}{dn}$ Differentiation in der Richtung der Normalen zur Stromlinie;

Seite

$$\frac{d\tau}{dn} = \frac{\tau}{R} + \frac{\tau_x}{r}, \qquad (224)\ 198$$

dasselbe für die Schubspannung τ, wenn man von der hydrodynamischen Abbildung wieder zum Spannungsfelde zurückkehrt.

$$M = 2\pi \frac{E\Theta}{l}, \qquad (232)\ 202$$

M kritisches Verdrehungsmoment für das Ausknicken einer sehr langen Welle, Θ polares Trägheitsmoment, l Länge.

IV. Abschnitt.

Umdrehungskörper mit achsialer symmetrischer Belastung; Wärmespannungen.

$$\mathbf{D} = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right), \qquad (234)\ 208$$

Einführung des Operators $\mathbf{D}$.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \mathbf{D}\tau = 0 \\ &\frac{\partial \tau}{\partial x} + \mathbf{D}\sigma_r - \frac{1}{r}\sigma_t = 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (237)\ 210$$

Gleichgewichtsbedingungen am Volumenelemente; die X-Achse fällt mit der Symmetrieachse zusammen.

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{D}^2 &= \frac{\partial}{\partial r}\mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\right) \\ \mathbf{E}^2 &= \mathbf{D}\frac{\partial}{\partial r} = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial r} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (238)\ 211$$

Einführung der Operatoren $\mathbf{D}^2$ und $\mathbf{E}^2$, die zur Abkürzung benutzt werden.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \mathbf{E}^2\xi = 0 \\ &\frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2} + \mathbf{D}^2\varrho = 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (239)\ 211$$

die elastischen Grundgleichungen in Zylinderkoordinaten, ϱ Verschiebungskomponente in radialer Richtung.

Seite

$$\varrho = e^{-\alpha x} R, \qquad (244)\ 215$$

$$(\alpha^2 + \mathsf{D}^2)^2 R = 0, \qquad (245)\ 215$$

Lösung für den Zylinder, falls die Konstante α und die Funktion R von r passend bestimmt werden. Die Lösung der letzten Gleichung erfolgt dann durch Reihendarstellungen; die Konstante α ergibt sich als Lösung einer transzendenten Gleichung mit unendlich vielen komplexen Wurzeln.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathsf{E}^2\right) V = 0, \qquad (257)\ 223$$

Laplacesche Gleichung für die Potentialfunktion V von außerhalb liegenden, symmetrisch verteilten Massen.

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= -6Gc\frac{x^3}{R^5} \\ \sigma_r &= -6Gc\frac{xr^2}{R^5} + \frac{m-2}{m}\frac{2Gc}{R(R+x)} \\ \sigma_t &= 2Gc\frac{m-2}{m}\left(\frac{x}{R^3} - \frac{1}{R(R+x)}\right) \\ \tau &= -6Gc\frac{rx^2}{R^5} \end{aligned}\right\}, \qquad (271)\ 231$$

$$c = \frac{P}{4\pi G}, \qquad (272)\ 232$$

Lösung von Boussinesq für den Spannungszustand in dem durch eine Ebene einseitig begrenzten, sonst unendlich großen Körper, der an der Stelle $x = 0$, $r = 0$ eine Last P trägt. Die X-Achse steht senkrecht zur Grenzebene, $R^2 = r^2 + x^2$.

$$\sigma_x = 2G\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{e}{m-2} - \frac{m+1}{m-2}\alpha t\right) \text{ usf.}, \qquad (276)\ 238$$

$$\nabla^2 \xi + \frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial x} - 2\frac{m+1}{m-2}\alpha\frac{\partial t}{\partial x} = 0 \text{ usf.}, \qquad (277)\ 238$$

Spannungen und elastische Grundgleichungen für die Wärmespannungen, α Ausdehnungskoeffizient, t Temperatur (Funktion von xyz). Für Umdrehungskörper gehen die elastischen Grundgleichungen über in

Seite

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\mathsf{E}^2\right)\xi+\frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial x}-2\frac{m+1}{m-2}\alpha\frac{\partial t}{\partial x}=0\\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\mathsf{D}^2\right)\varrho+\frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial r}-2\frac{m+1}{m-2}\alpha\frac{\partial t}{\partial r}=0\end{aligned}\right\}, \qquad (279)\ \mathbf{239}$$

wobei

$$e=\frac{\partial \xi}{\partial x}+\mathsf{D}\varrho \qquad (280)\ \mathbf{239}$$

ist. Für einen **Hohlzylinder** mit den Radien r_i und r_a und den Temperaturen t_i und t_a erhält man an den von den Zylinderenden weit genug entfernten Stellen die größten Spannungen

$$\left.\begin{aligned}&\text{1) für } r=r_i\\ \sigma_x=\sigma_t&=-2G\frac{m+1}{m-1}\alpha(t_i-t_a)\left(\frac{r_a^2}{r_a^2-r_i^2}-\frac{1}{2\lg\frac{r_a}{r_i}}\right)\\ &\text{2) für } r=r_a\\ \sigma_x=\sigma_t&=-2G\frac{m+1}{m-1}\alpha(t_i-t_a)\left(\frac{r_i^2}{r_a^2-r_i^2}-\frac{1}{2\lg\frac{r_a}{r_i}}\right)\end{aligned}\right\}. \qquad (282)\ \mathbf{245}$$

An den **Zylinderenden** treten aber größere Spannungen auf. Das Zylinderende erfährt eine Erweiterung ϱ_0 gegenüber dem Mittelstück, die

$$\varrho_0=0{,}38\,r_m\alpha_1(t_i-t_a). \qquad (295)\ \mathbf{255}$$

gesetzt werden kann und die **größte Spannung** am Zylinderende wird

$$\sigma_t^{\max}=1{,}05\,E\alpha_1(t_i-t_a). \qquad (296)\ \mathbf{256}$$

Hier bedeutet α_1 den Ausdehnungskoeffizienten und die Formeln gelten nur näherungsweise und unter der Voraussetzung, daß die Wanddicke des Rohres als klein gegenüber dem Durchmesser betrachtet werden kann.

Seite

V. Abschnitt.

Die allgemeinen Sätze über die Formänderungsarbeit; Eigenspannungen.

$$A = G\int\left\{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{1}{m-2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 + \right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{2}\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2\right)\right\} dv, \qquad (301) \quad 264$$

Darstellung der Formänderungsarbeit A als Funktion der Formänderungsgrößen ε (Dehnung) und γ (Winkeländerung); die Integration erstreckt sich über das Volumen des Körpers.

$$\Sigma \mathfrak{P}\mathfrak{s} - \delta A = 0, \qquad (304) \quad 267$$

Aussage des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten für elastisch feste Körper; $\mathfrak{P}$ äußere Kraft, $\mathfrak{s}$ virtuelle Verschiebung ihres Angriffspunktes, A ist nach Gl. (264) einzusetzen.

$$A = \frac{1}{2}\int\left\{\frac{m+1}{mE}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{1}{mE}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2\right.$$
$$\left. + \frac{1}{G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)\right\} dv, \qquad (314) \quad 283$$

Darstellung der Formänderungsarbeit A als Funktion der Spannungsgrößen σ und τ;

$$\delta A = 0, \qquad (315) \quad 286$$

Satz von der Variation des Spannungszustandes (allgemeinste Fassung des entsprechenden Satzes von Castigliano); bei der Variation ist A nach Gl. (314) einzusetzen und eine Variation zu betrachten, die überall den Gleichgewichtsbedingungen genügt, während die elastische Formänderung dabei außer Berücksichtigung bleibt.

$$\left.\begin{aligned}
2\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon_x + \frac{e}{m-2}\right) + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} &= 0\\
2\frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon_y + \frac{e}{m-2}\right) + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} &= 0\\
2\frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon_z + \frac{e}{m-2}\right) + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} &= 0
\end{aligned}\right\}, \qquad (319) \quad 299$$

Seite

Bedingungsgleichungen für die sechs Formänderungsgrößen ε und γ, die zu den **Eigenspannungen** gehören (treten für diesen Fall an die Stelle der elastischen Grundgleichungen).

$$\sigma_r = c(r - a), \qquad (325)\ 307$$

einfachster Ansatz für die **Gußspannungen in einer Kugel** vom Halbmesser a; σ_r Spannung in radialer Richtung im Abstande r vom Mittelpunkt, c eine von den Herstellungsbedingungen abhängige Konstante.

VI. Abschnitt.

Verschiedene Anwendungen.

$$\left.\begin{aligned} \xi &= az\frac{\partial V}{\partial x} + b\int_z^\infty \frac{\partial V}{\partial x}\,dz \\ \eta &= az\frac{\partial V}{\partial y} + b\int_z^\infty \frac{\partial V}{\partial y}\,dz \\ \zeta &= az\frac{\partial V}{\partial z} + cV \end{aligned}\right\}, \qquad (326)\ 314$$

$\xi\eta\zeta$ die Verschiebungskomponenten, die der **Hertzschen Theorie der Härte** zu Grunde liegen, V das Potential einer über die kleine Druckfläche verteilten Masse, mit deren Mittelpunkt der Koordinatenursprung zusammenfällt, während die Z-Achse in der Richtung der Normalen zur Oberfläche gezogen ist. Zwischen den Konstanten a, b, c bestehen die Beziehungen

$$2a + \frac{m}{m-2}(a + b + c) = 0 \qquad (327)\ 315$$

$$a - b + c = 0. \qquad (329)\ 318$$

Für sehr kleine Abstände z hat man

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2\pi\mu, \qquad (332)\ 321$$

Seite

wenn μ die **Dichte der Massenverteilung** über die Druckfläche an dieser Stelle bezeichnet; hiermit wird ferner

$$(\sigma_z)_{z=0} = 4\pi a G \mu. \qquad (333) \quad 321$$

Für alle Punkte **innerhalb der Druckfläche** hat man zu setzen

$$V = \frac{\gamma_1 x^2 + \gamma_2 y^2 - \alpha}{2\left(a_1 \frac{m_1 - 1}{m_1} + a_2 \frac{m_2 - 1}{m_2}\right)}. \qquad (338) \quad 325$$

Dabei sind $\gamma_1 \gamma_2$ Konstanten, die von den Krümmungshalbmessern der Oberflächen der beiden aufeinander gedrückten Körper abhängen, α ist die Abplattung, die Zeiger 1 und 2 bei a und m (**Poissonsche** Konstante) beziehen sich auf den ersten und den zweiten Körper.

$$V = \frac{\mu_0 \pi^2}{4p}(2p^2 - u^2), \qquad (340) \quad 328$$

Potential einer kreisförmigen Massenverteilung innerhalb des Kreises vom Halbmesser p im Abstande u vom Mittelpunkte, μ_0 Massendichte in der Mitte; an anderen Stellen sind die Massendichten proportional den Ordinaten einer über dem Kreise errichteten Halbkugel. (Hilfssatz aus der Potentialtheorie).

Aus dem Vergleiche von (338) und (340) folgt für die Konstanten

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 2\gamma p^2 \\ \mu_0 &= -\frac{2\gamma p}{\pi^2\left(a_1 \frac{m_1 - 1}{m_1} + a_2 \frac{m_2 - 1}{m_2}\right)} \end{aligned}\right\} \qquad (343) \quad 330$$

$$P = \frac{16\gamma p^3}{3\left(\frac{m_1 - 1}{m_1 G_1} + \frac{m_2 - 1}{m_2 G_2}\right)}, \qquad (345) \quad 330$$

P die Kraft, mit der die Körper aufeinander gedrückt werden; aus der letzten Gleichung läßt sich der Halbmesser p der Druckfläche berechnen.

$$F = c_1 r^2 - c_2 r_1 \varphi_1 \sin \varphi_1 - c_2 r_2 \varphi_2 \sin \varphi_2, \qquad (351) \quad 335$$

Seite

F Spannungsfunktion für den ebenen Spannungszustand in der Walze eines Rollenlagers, $r r_1 r_2$ Abstände des betrachteten Punktes vom Kreismittelpunkte und den beiden Lastangriffspunkten, φ_1 und φ_2 die Winkel zwischen r_1 und r_2 und der Lastrichtungslinie. Zwischen den Konstanten c besteht die Beziehung

$$2c_1 = \frac{c_2}{a}, \qquad (357) \; 338$$

a Halbmesser des Querschnittskreises:

$$c_2 = c = \frac{P}{l\pi} \qquad (361) \; 341$$

P Belastung, l Länge der Walze.

$$w = 4\frac{m^2-1}{m^2 E}\frac{P}{l\pi}\left(\frac{1}{3} + \lg\frac{2a}{b_1}\right), \qquad (371) \; 350$$

w Zusammendrückung der Walze, b_1 halbe Breite der Druckfläche. Hierfür kann auch

$$w = 2\frac{m^2-1}{m^2 E}\frac{P}{l\pi}\left(1{,}207 + \lg\frac{alE}{P}\right) \qquad (372) \; 352$$

geschrieben werden (Bezeichnungen wie vorher).

$$F = \frac{1}{4}p\left\{r^2 - 2a^2\lg r - \frac{(r^2-a^2)^2}{r^2}\cos 2\varphi\right\}, \qquad (373) \; 353$$

Spannungsfunktion für einen sehr breiten durchlochten Zugstab (Kirsch), a Halbmesser des kreisrunden Loches, $r\varphi$ Polarkoordinaten der betrachteten Stelle, p Betrag der Zugspannung in größeren Abständen von dem Loche;

$$\sigma_{max} = 3p, \qquad (375) \; 354$$

größte Spannung am Lochrande.

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_z} = 2f^2 + 1 \pm 2f\sqrt{f^2+1}, \qquad (382) \; 362$$

Verhältnis zwischen der größten und kleinsten Hauptspannung in einem lockeren Erdkörper an der Grenze des Gleichgewichts, f Reibungskoeffizient.

Sachverzeichnis.

	Seite
Abrundungshalbmesser	194
Airysche Spannungsfunktion	56
Aktiver Erddruck	362
Balken, belastet	64
Beanspruchung des Materials	19
Besselsche Funktionen	114
Bettungsziffer	112
Biegungsgleichung von Platten	97
Bodendruck in Silo	143
Boussinesq	230
Castiglianosche Sätze 271, 276, 290	
Chladni, Klangfiguren	132
Dickwandige Röhren	60
Druckfläche	318, 322
Drucklinie	342
Druckversuch, Theorie	221
Druckverteilung bei Platten	127, 128
Durchlochter Zugstab	352
Eigenspannungen	293
„ ohne Einfluß auf das elastische Verhalten	301
Eindrehung in Welle	195
Einflußzahlen	275
Eisdecke	113
Elastische Grundgleichungen	48
—, in Zylinderkoordinaten	204
—, für Wärmespannungen	238
Elliptische Platte	106
Erddruck	358
Fließfiguren	22
Formänderungsarbeit	261
Gegenseitigkeit der Verschiebungen	275
Getreidesilo	143
Gleitflächen	24, 362
Grenzkurven von Mohr	26
Grundgleichungen	48, 204, 238
Gußspannungen	293
—, in Kugel	302
—, Abhängigkeit von Herstellung	306
Härte	311
Härteformeln	331
Hauptebene, Spannungszustand	9
—, Trägheitsmomente	33
Hertz, Härte	311
—, schwimmende Platten	113, 129
—, Walzenlager	333
Hilfssatz der Potentialtheorie	326
Hohlzylinder, Wärmespannungen	240
Homogener Spannungszustand	2
Huber, Wärmespannungen	245
Hydrodynamisches Gleichnis	189
Hyperbolische Funktionen	152
Kirsch, durchlochter Zugstab	352
Kopfschraube	206
Krumme Stäbe	73

Seite

Kugel, Härteformeln 332
Kugeloktant, ebene Abbildung 15

Lampenzylinder 247
Laplacesche Gleichung . . 222
Laplacescher Operator . . . 49
Leon, Wärmespannungen . . 236
Lineare Vektorfunktion . . . 6

Maxwellscher Satz 275
Mittlere Hauptspannung . . . 29
Mohr, Beanspruchung . . . 19
—, Darstellung des Spannungszustandes 13, 18
—, Trägheitskreis 41
Momente eines Massensystems 29

Nachgiebige Unterlage . . . 112
Natürlicher Zustand 293

Operator D 208
— D^2 211
— E^2 . . . . 114, 211
— ∇^2 49

Passiver Erddruck 362
Platte 52
—, Biegungsgleichung 97
—, — in Polarkoordinaten . . 110
—, auf nachgiebiger Unterlage 112
—, Schwingungen 130
—, dünne mit großer Ausbiegung 132
—, mit Anfangsspannung . . 174
Polares Trägheitsmoment . . 39
Potentialfunktionen 222
Potentialtheorie, Hilfssatz . . 326
Prandtl, Torsion 171, 173

Rankine, Erddruck . . . 361, 363
Ring 81
Ringgeschütz 83
Ringsektor 89

Seite

Rollenlager 333
Rotierende Scheibe 92

Scheibe 52
Schleifstein 92
Schubfestigkeit 21
Schwimmende Platten 114
Schwingungen von Platten . . 130
Seifenhaut 173
Spannnungsellipsoid 12
Spannungsfläche 56, 171
Spannungsfunktion . 56, 139, 168, 335, 353.
Spannungsgefäll 193
Spannungslinien . . 165, 171, 187
Spannungshügel 171
Spannungsprojektionen 7
Sprödigkeit 367
Staumauer 68
Stoßfestigkeit von Steinen . . 367
Stützmauern, Erddruck . . . 364

Temperaturspannungen . . . 236
Tetraeder, Spannungsgleichgewicht 5
Torsion, rechteckiger Querschnitt 145
—, quadratischer Querschnitt. 158, 162.
—, Flacheisen 160, 162
—, dreieckiger Querschnitt . . 163
—, Umdrehungskörper 177
—, kegelförmiger Stab . . . 186
—, experimentelle Lösung . . 173
Torsionssteifigkeit 172
Trägheitsmomente 32
Trommelfell 174

Umdrehungskörper, Torsion . 177
—, achsiale Belastung 204
Umschlingungsfestigkeit . . . 21

Variation des Spannungszustandes 282

Seite

Vektorfunktionen 6
Vektormomente 30
Verdrehungselastizität 145
Verdrehungswinkel, rechteckig. Querschnitt 156
—, dreieckiger Querschnitt . . 167
—, Linien gleichen Verdrehungswinkels 189
Virtuelles Prinzip 259
— für elastische Körper . . . 267

Walzenlager 333
Wärmespannungen 236
Wellen, Torsion 145
—, Umdrehungskörper 177

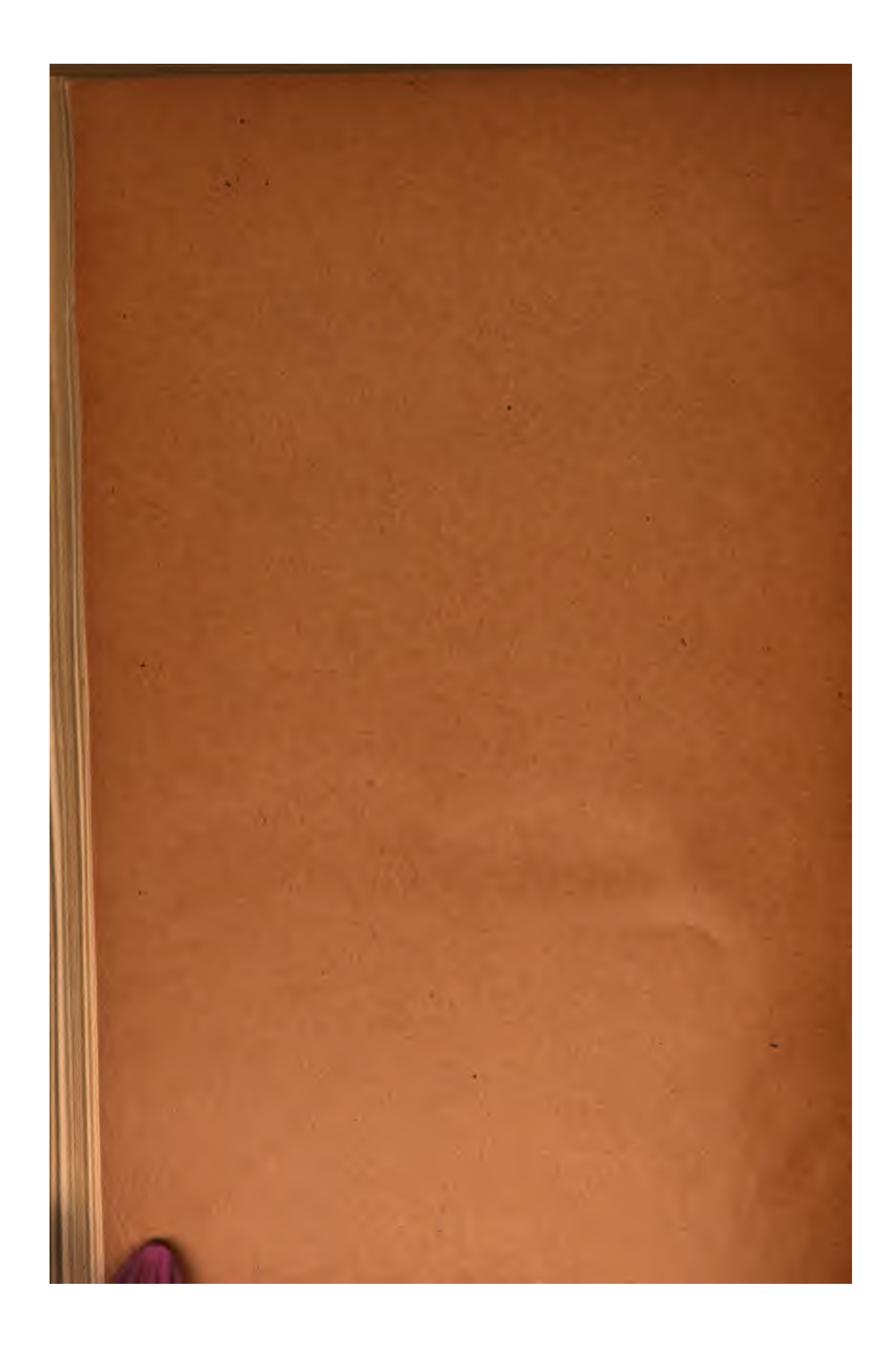
Seite

Wellen, Abrundungshalbmesser 194
—, Eindrehung 195
—, Sitzstelle eines Rades . . 196
—, Knickgefahr 197
Wertziffer (Steine) 371

Zähigkeit 372
Zentrifugalmomente 32, 37
Zugstab mit Loch 352
Zusammendrückung einer Walze 345
Zylinder, achsiale Belastung 212
—, Wärmespannungen . . 240, 247
—, Härteformeln 333
Zylinderfunktionen 114

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.






Stanford University Libraries
3 6105 010 765 688

